Fibonacci y las margaritas

(Luis Balbuena Castellano)

Lo dedico a la intersección de los conjuntos A y B siendo
A = De nombre Margarita
B = Profesora de Matemáticas

Leonardo de Pisa.

No se sabe si Leonardo Pisano Bigollo, más conocido por Leonardo de Pisa y más aún por Fibonacci, tuvo conciencia de la transcendencia contenida en la sucesión que lleva su nombre. Posiblemente no. Tampoco se ha clarificado el enigma que supone encontrar los números de su sucesión en tantas y tantas situaciones naturales. Cuando uno ve en la naturaleza, por ejemplo, una roca erosionada por fenómenos atmosféricos o cómo un árbol se retuerce más de la cuenta, suele exclamar: "¡Caprichos de la naturaleza!" y así se justifica la extrañeza que suponen tales visiones excepcionales. Pero cuando observamos una y otra vez que los números de la sucesión de Fibonacci están aquí y allí, con sorprendente regularidad, ¿puede explicarse considerando que es un "capricho de la naturaleza"? No parece sensato hacerlo, sino más bien pensar que hay un "algo" tal vez fuera del alcance de nuestro limitado conocimiento, que nos impide encontrar una explicación coherente y rotunda a tal fenómeno.

De Leonardo se sabe bien poco. El retrato que existe de él (figura1) es de dudosa autenticidad, lo cual no tiene mayor transcendencia. Más interesante habría sido conocer más datos de su vida, tener una idea de su pensamiento en torno a las matemáticas o en torno a los números sobre los que hizo la gran aportación. Lo poco que se conoce de su vida está contenido en una síntesis autobiográfica que figura en su libro "Liber abaci" publicado en 1202, cuando se supone que tenía 32 años:

> "Acompañé a mi padre cuando fue destinado por el gobierno de su tierra natal, Pisa, como funcionario en la aduana de Bujía (Argelia) para ocuparse de los comerciantes de Pisa que se encontraban allí. Hizo que me instruyeran maravillosamente en los números y los cálculos indo-arábigos. Me gustó tanto la enseñanza que recibí que después continué los estudios de matemáticas durante los viajes de negocios que hice por Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y Provenza en los que disfruté de las discusiones y los debates con los estudiosos de aquellos lugares".

El libro, uno de los más trascendentes de la Edad Media, tenía como objetivo explicar los números indo-árabes e introducirlos así en Italia y en el resto de Europa que, en general, desconocían aún ese sistema de manejar las cantidades y seguían utilizando los números romanos (I, V, X, C, D, M) para expresar cantidades y el ábaco para hacer operaciones. Los números habían sido inventados en el noroeste de la India, en un lugar no precisado. Allí nació también la más importante de las cifras: el cero. Los árabes conocieron el sistema en los comienzos de su expansivo imperio, los asimilaron y, poco a poco, los extendieron por su territorio.

Pero para el tema que quiero desarrollar no necesito ese importante aspecto de la aportación de Fibonacci (que, por cierto, no hay constancia de que se conociera por este nombre en su época).

Sucesión de Fibonacci.

La atención la fijaré en una famosa sucesión que él introduce como problema y para la que utiliza como protagonista a una tierna pareja de conejitos recién nacidos que, con el fin de identificarlos, les llamaré Poli y Pili. Pues bien, esta parejita tiene la peculiaridad de que a los dos meses es capaz de procrear una nueva pareja de conejos y, a partir de ahí, cada mes procrea una pareja más. Su descendencia tiene exactamente las mismas peculiaridades. Así las cosas, nuestra pareja empieza a construir su "árbol genealógico" en la forma que se indica en la figura 2. Obsérvese que al tercer mes hay dos parejas porque Poli y Pili acaban de procrear sus primeros hijos. Sin dificultad se va obteniendo el número de parejas de los siguientes meses.

Sintetizando la información, se obtiene, sin más, la famosa sucesión:

Meses :	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Número de parejas:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55...

Como es sabido, el término general se obtiene del siguiente modo:

$$a_{1}= 1$$
$$a_{2}= 1$$
$$a_{n}= a_{n-1}+ a_{n-2}$$

Fibonacci y la naturaleza

Ya tenemos los elementos necesarios para nuestra incursión por la naturaleza de la mano de esta sucesión a la que, además del nombre con el que se la conoce, deberíamos añadirle el de "sucesión ecológica". La justificación está ligada a las muchas veces en que encontramos alguno de sus términos en objetos naturales, sobre todo en el mundo vegetal y de manera especial en las flores.

He aquí muchos algunos ejemplos más o menos conocidos:

- Las espirales de la piña tropical (ananás) son 8 y 13
- Las espirales de las piñas de los pinos y otras coníferas son 8 y 13
- Las hojas de las palmeras (a menos de la Palmera Canariensis), aparecen en el tronco en espirales de los dos sentidos en números de 8 y 13.
- Las hojas de las piteras van contorneándose alrededor del tronco formando 8 y 13 espirales.
- Las semillas de girasol poseen 34 y 55 filas en espiral.

El final de la historia que les relato empieza cuando me puse a contar los pétalos de las flores que vi en Giverny (Francia), concretamente en la casa-museo del "impresionante" Monet. Me acompañaba la profesora Emma García Mora. Para nuestra sorpresa pudimos comprobar que, en una buena cantidad de casos, el número de pétalos coincidía con uno de los de la sucesión de Fibonacci. A partir de ese primer contacto, seguí las pesquisas y he podido comprobar la frecuencia con que este fenómeno se produce en las flores y, en especial, en las que conocemos como margaritas. Desde el punto de vista botánico, la margarita es una flor compuesta, es una inflorescencia, esto es, un conjunto más o menos numeroso de flores que forman la parte central de la margarita. Pues bien, de las muchas flores que se encuentran en ese botón central, las que ocupan los extremos desarrollan un hermoso pétalo que, junto con los demás, conforman ese conjunto "encantagente" que caracteriza a estas populares flores, pues no suelen dejar indiferente a nadie.

No todas tienen un número de pétalos que coincide con algún término de la sucesión pero sí una gran mayoría. En alguna he encontrado que unas tienen 13 pétalos y, en la misma planta, otras tienen 21. Es curioso comprobar cómo en algunas margaritas que forman setos, que suelen ser flores no muy grandes, todas ellas tienen 13 pétalos. En una especie observé que el número de pétalos variaba de unas flores a otras dentro de la misma mata. Sin embargo, el número más frecuente era el 13. Debo reconocer que no tengo suficientes conocimientos de botánica como para distinguir las diferentes especies ni para saber con seguridad si una determinada planta es o no de la familia de las margaritas. En cualquier caso, para el estudio que he pretendido hacer, la única circunstancia relevante para mi es que la flor tenga pétalos que se puedan contar. Con esta hipótesis de trabajo, hasta este momento, he encontrado flores de 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34 y 55 pétalos. Y como pienso seguir contando, espero encontrar en el futuro más "flores de Fibonacci".

En el transcurso de todo este contar y contar pétalos, me surgió la pregunta de si las personas, cuando dibujan una margarita, la hacen con un número de pétalos que sea también un número de Fibonacci. Así que preparé unas cuartillas encabezadas con este texto: "Por favor, dibuja una margarita. Gracias". Realmente ninguna de las que he encuestado se ha negado a dibujarla. Tengo más de un centenar de respuestas de personas de distintas edades. En la cuartilla les solicito que me señalen la edad y el sexo. Con todo ello puedo adelantar los siguientes datos:

- La dibujan con un número de Fibonacci: 34%

  Ese porcentaje se desglosa así:

  Con 5 pétalos: 27%
  Con 8 pétalos: 32%
  Con 13 pétalos: 18%
  Con 21 pétalos: 23%

- La dibujan con n – 1 ó n + 1 pétalos (n= número de Fibonacci) : 41%

  Este porcentaje se desglosa así:

  Con n – 1 pétalos: 62%
  Con n + 1 pétalos: 38%

- De los datos anteriores se deduce que las margaritas dibujadas con n – 1, n y n + 1 pétalos representan el 75%.

Algunas consideraciones didácticas.

Lo que he relatado tiene una aplicación directa en el aula. Como puede observarse, se trata de una investigación que está al alcance de alumnos y alumnas de cualquier edad y formación académica. En cada caso se podrá llegar hasta donde lo permitan las circunstancias académicas, el tiempo disponible, etc. Pero considero del máximo interés en esta investigación el aspecto relacionado con la observación y el conocimiento de la naturaleza y su relación con un sencillo concepto matemático. Una vez más las matemáticas ayudan a interpretar la naturaleza.

Por otra parte, existe un buen enlace para continuar la investigación. Se trata de la conocida propiedad de la sucesión de Fibonacci según la cual, el límite del cociente entre un término y el anterior, es el número áureo. Como la convergencia es muy rápida, la comprobación se hace fácilmente con la ayuda de la calculadora. Bastan unos pocos cocientes para obtener una buena aproximación. Y a partir de esta propiedad se enlaza con el número de oro y se continua la investigación con otros materiales y con otros objetivos.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

siendo n=1,2,3,4,5,6,...