PREMISA

Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)

ISSN 2618-3315

Año 20 - Nº 78

Agosto 2018

SOAREM Personería Jurídica: Resolución Nº 000530 del 31-05-1999
Correo electrónico: soarem1@gmail.com Página web: www.soarem.org.ar
Virrey Loreto 2676 - 7º Piso - (1426) Ciudad de Buenos Aires, Argentina

El 31 de octubre de 1998 se creó la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM). La Revista Premisa de SOAREM es una publicación trimestral que se distribuye gratuitamente entre los socios. Contiene artículos sobre distintos temas de matemática desde el nivel inicial al universitario, tratamientos didácticos, experiencias, investigaciones, etc. Además brinda información acerca de congresos, reuniones y actividades de Educación Matemática, historia de las sociedades, comentarios bibliográficos, matemática recreativa, entre otros.

Página web: www.soarem.org.ar

PREMISA
Nº 78

Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática **(SOAREM)**
Número de Edición: 78
Fecha de Edición: Agosto 2018
Directora: Chistiane Ponteville
Propietario: SOAREM

PREMISA
Año 20
Nº 78
Agosto 2018
ISSN 2618-3315

ÍNDICE

EDITORIAL

En este número, la Revista Premisa acerca a sus lectores cuatro artículos que favorecen la reflexión sobre la matemática y su presencia en el discurso matemático escolar.

En el primero, María Colina y Carmen Valdivé (Venezuela), comparten la primera parte de una publicación que se continuará en el número siguiente de Premisa y en el que presentan la evolución histórica de los conceptos de razón y proporción.

A continuación, Carlos Fabián Pesce (Argentina) describe una interesante experiencia llevada a cabo con estudiantes de profesorado de matemática en relación a las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos.

En tercer lugar, Carlos Oropeza Legorreta (México) y Cecilia Crespo Crespo (Argentina), presentan resultados de una experiencia llevada a cabo con estudiantes de ingeniería y en un diplomado destinado a docentes en la que se ponen de manifiesto ciertas dificultades en la resolución de problemas que involucran un enfoque algebraico.

Finalmente Jorge Enrique Mendoza Guzmán (Colombia) realiza un analisis historico- epistemologico acerca de la manera en que Descartes introduce las ecuaciones algebraicas y resuelve el problema de Pappus.

Comité Editorial – Revista Premisa

LAS DEFINICIONES DE RAZÓN Y PROPORCIÓN: PARTE I LA HISTORIA

María Colina y Carmen Valdivé
Unidad Educativa "Carbonero",
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA), Venezuela
mariucolina@hotmail.com, carmenv@ucla.edu.ve

FECHA DE RECEPCIÓN: 08/12/17 FECHA DE ACEPTACIÓN: 23/04/18

RESUMEN

El reporte que se presenta muestra los avances de una investigación donde uno de los propósitos a abordar es estudiar la evolución histórica de los conceptos de razón y proporción desde los distintos contextos matemáticos a través de un análisis histórico-epistemológico. Se determinaron seis momentos históricos: la razón asociada a un número entero, a magnitudes geométricas y aritméticas, a relaciones distancia-tiempo, a cantidades que se aproximan a cero, a la definición de derivada y a un número real.

ABSTRACT

The report presented shows the progress of a research where one of the purposes to be addressed is to study the historical evolution of the concepts of rate and proportion from different mathematical contexts through a historical-epistemological analysis. Six historical moments were determined: the rate associated to an integer number, to geometric and arithmetic magnitudes, to distance-time relationships, to quantities that approach to zero, to the definition of derivative and to a real number.

PALABRAS CLAVE:
razón y proporción - análisis histórico

KEYWORDS:
rate and proportion - historical analysis

INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad diferentes personajes intelectuales han dirigido su interés al estudio de los objetos matemáticos que en la actualidad conocemos y utilizamos en nuestra labor docente, en este caso nuestra atención se centrará en los conceptos de razón y proporción. Su aparición en los libros se remonta a la edad Antigua en el libro V de los Elementos de Euclides, del cual Oller y Gairín (2013) indican:

> La importancia de los Elementos como fuente histórica en cualquier aspecto de la matemática, incluida la proporcionalidad, es indudable. Sin embargo, ha de tenerse muy en cuenta que este texto nos muestra la teoría ya terminada sin pistas sobre el cómo ni mucho menos el por qué. Es decir, aunque los elementos resultan de gran utilidad a la hora de conocer el conocimiento teórico que se poseía en la época respecto a los conceptos estudiados, no nos proporcionan información alguna sobre los problemas concretos que pudieron dar lugar a dicha teoría (p.321).

Estos autores (ob. Cit.) señalan que el razonamiento proporcional es una herramienta que se utilizaba desde tiempos muy remotos. De hecho, Acosta, Rondero y Tarasenko (2010) explican que en culturas como la babilónica, la china y la egipcia se manejaba en actividades como el cobro de impuestos (p. 535-536). Sin embargo, los conceptos de razón y proporción no aparecen en el currículo de las distintas universidades que se encuentran en Venezuela, encontrándose de forma implícita en muchos de los contenidos de matemática que son abordados en el subsistema de educación universitaria, como lo es, por ejemplo, el concepto de derivada como un límite de cociente incremental, que es una pieza de gran importancia que forma parte de la base fundamental del estudio del Cálculo Diferencial.

De forma similar; Salazar y Díaz (2009) explican que “en una mirada histórico-epistemológica, las magnitudes, de gran importancia en los tiempos de Euclides, hoy prácticamente han desaparecido de la enseñanza” (p.209). De lo anterior, se evidencia que no se le da la importancia que cómo objetos matemáticos tienen, estando ausentes en el sistema educativo de nuestro país y en otras latitudes, a pesar de ser usado desde la antigüedad. De esta manera, el concepto de proporcionalidad es básico en la enseñanza de la matemática y por esta razón resulta de gran importancia realizar un análisis histórico epistemológico, dado que la producción de dicho análisis permitirá rescatar la complejidad y ampliar la concepción de los conceptos en las personas. Además, proporcionará herramientas didácticas para mejorar el proceso de enseñanza de los mismos dentro del aula (Bergé y Sessa; 2003).

LOS CONCEPTOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN EN LA HISTORIA

Los conceptos de razón y proporción conocidos en la actualidad no son más que el resultado de saltos epistemológicos ocurridos a lo largo de la historia durante aproximadamente unos 2000 años. De acuerdo con Serres (1996) “El problema de los múltiples orígenes de las formas matemáticas, el desciframiento de las leyendas que los relatan se reúnen en el espacio abierto o cerrado por esta conjunción o esta disposición de separación o de coordinación que diseñan y describen” (p.268). Se conoce que la noción de proporción dada por Eudoxo en el siglo V a.C se mantiene vigente y de la misma se desprenden una serie de propiedades y procedimientos que son útiles para el desarrollo del razonamiento proporcional. Según este autor (ob. cit.) el concepto de proporción se consideró como la gran invención griega y su intervención entre las diferentes disciplinas científicas enriquece su significado, de acuerdo con esto expone que:

> Se desliza de una región a otra: *aritmética*, cuando dos o más fracciones se igualan; *geométrica*: por el teorema de Tales; casi algebraica, en tanto que las series de relaciones sirven a los matemáticos griegos desde los orígenes hasta las fechas más tardías, como lengua universal para la demostración; *musical*, por los intervalos cifrados de la gama, … *astronómica*, por la misma armonía de las esferas,… *física*, por las proporciones definidas por todas partes en relación con los estados físicos primeros de la materia, tierra, agua, aire y fuego (p.266).

En torno a esto, el estudio de la evolución histórica de los conceptos de razón y proporción permitió indagar sobre las ideas, métodos, situaciones y matemáticos que contribuyeron a formalizar esta noción. Este estudio en particular, se realizó a través de seis períodos históricos, los cuales se organizaron de manera cronológica con un título caracterizador para cada segmento.

LA EDAD DE PIEDRA HASTA INICIOS DEL SIGLO V A.C: LA RAZÓN ASOCIADA A UN NÚMERO ENTERO

Inicialmente nos remontamos a la Edad Antigua donde se hace especial énfasis en que el lema de la escuela pitagórica era el de "todo es número" (Boyer, 2003; p.79). Los griegos usaban la palabra número para darle significado a un número entero como un número natural o a un entero positivo (Edwards, 1979; p.06; Boyer, 2003; p.83). A esta escuela se le atribuye el origen de la teoría de proporciones. Boyer (2003) menciona que la teoría de proporciones era uno de los intereses de disertación de los griegos. Durante este período histórico, los matemáticos teóricos griegos consideraban una fracción escrita de la forma ***a/b*** , como una simple entidad y no como un número, pero si como una relación o razón ***a:b*** entre los números (enteros) ***a*** y ***b*** (Edwards, 1979; p.6). Boyer (2003) explica que en Grecia "a las fracciones no se las consideraba como entidades únicas, sino como una razón o relación entre dos números enteros" (p.83).

Además, definieron proporción como la igualdad de dos razones, es decir, ***a:b = c:d*** si a es la misma parte (o partes) o múltiplo de ***b*** como ***c*** es de ***d***. Por ejemplo, ***6:9=10:15***, pues ***6*** es dos veces la tercera parte de ***9***, como ***10*** es dos veces la tercera parte de ***15***. Más formalmente, "***a:b = c:d*** si existen enteros ***p,q,m*** y ***n*** tales que ***a= mp, b= mq, c=np*** y ***d= nq***(así ***a/b*** y ***c/d*** son múltiplos integrales de ***p/q***). Sobre estas bases los Pitagóricos primitivos desarrollaron una elemental teoría de proporcionalidad (Edwards, 1979; p.6).

MEDIADOS DEL SIGLO V A.C: LA RAZÓN ASOCIADA A MAGNITUDES GEOMÉTRICAS Y ARITMÉTICAS

Al realizar un estudio en el contexto geométrico donde se involucraban magnitudes como longitud, área y volumen, los pitagóricos al principio creían que cualquier par de segmentos de rectas son conmensurables, esto es, son múltiplos de una unidad común (Edwards, 1979; p.06, Cantoral y Farfán, 2004; p.18); esto es refutado por Platón que durante su juventud descubre los inconmensurables, produciendo una crisis lógica que arrojaba graves dudas sobre las demostraciones que recurrían a la idea de proporcionalidad, pero la crisis había sido evitada con éxito por medio de los principios enunciados por Eudoxo (Boyer, 2003; p.155). Valdivé y Garbin (2008) indican que para esta misma etapa histórica, Hipócrates de Chíos compara magnitudes entre las áreas de dos polígonos inscritos en dos círculos, concluyendo que están a la misma razón que la de los cuadrados de los radios de los círculos. Sucede igual para las áreas de los círculos (p.429).

Ahora bien, el descubrimiento de los inconmensurables hecho por los Pitagóricos de las proporciones integrales muy usada para la comparación de razones de magnitudes geométricas invalida esas pruebas geométricas que habían utilizado los conceptos de proporcionalidad. De hecho, de acuerdo a Boyer (2003) tal descubrimiento "había producido un verdadero escándalo lógico, al ser la causa de la ruina de la teoría de proporciones" (p.127).

Eudoxo de Cnido, formula por su parte su propia definición de proporcionalidad (de razones de magnitudes geométricas) según Boyer (2003), como sigue:

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en orden correspondiente (Boyer, 2003; p.127).

Esto es, que "las razones ***a:b*** y ***c:d*** son proporcionales ***a:b*** = ***c:d*** probando que, dado cualquier par de enteros positivos ***m*** y ***n*** se sigue que ***na>mbync>mdona=mbync=mdona<mbync<md***"(Edwards, 1979; p.13). La teoría de la proporcionalidad que Eudoxo construyó sobre las bases de la definición anterior es presentada en el libro V de los Elementos de Euclides (Edwards, 1979; p.14). En su obra, Euclides presenta esta definición de proporcionalidad, que constituye formulación del llamado "Axioma de Arquímedes", propiedad que Arquímedes mismo atribuía a Eudoxo. Este matemático afirmaba que "dadas dos magnitudes geométricas comparables ***a y b*** , existe un entero n tal que ***na*** > ***b***" (Edwards, 1979; p.14) la cual generalmente se asocia como un axioma de Arquímedes pero el autor lo llamará "Axioma de Eudoxo". En este sentido, Boyer (2003) manifiesta que "la palabra razón representaba en la matemática griega un concepto esencial indefinido, puesto que la "definición" de razón de Euclides como un cierto tipo de relación en tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo pronto se mostró insuficiente" (p.127). Boyer (2003) también plantea que:

> La idea de razón de Eudoxo excluye el cero y clarifica lo que debe entenderse por magnitudes del mismo tipo; un segmento, por ejemplo, no puede compararse en términos de razón con un área, ni un área puede compararse con un volumen. (p.127)

SIGLO XIV HASTA EL SIGLO XV: LA RAZÓN ASOCIADA A RELACIONES DISTANCIA- TIEMPO

Durante la Edad Media "se define el movimiento uniforme, si iguales distancias son descritas en tiempos iguales" (Edwards, 1979; p.87; Boyer, 2003; p.336, Cantoral y Farfán, 2004; p.52). Además, Edwards (1979) define la aceleración uniforme como el incremento de velocidad adquirido en iguales intervalos de tiempo (p.87). Sin embargo, para tal variación de movimiento deben definir velocidad instantánea. En vista de que carecen de la noción de límite de razones sólo pueden definirla en términos de la distancia que sería atravesada por un punto si este se moviese uniformemente sobre un periodo de tiempo con la misma velocidad si la tuviese en ese instante mismo.

Boyer (2003) relata que los filósofos escolásticos dedujeron una formulación para el caso de una velocidad de cambio uniforme que se suele conoce en la actualidad como la “regla del Merton College”, la cual afirma que:

> Si un cuerpo se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, entonces la distancia recorrida será la misma que recorrería otro cuerpo moviéndose durante el mismo tiempo con un movimiento uniforme de velocidad igual a la del primer cuerpo exactamente en el punto medio del intervalo de tiempo. (p.336)

Anteriormente se mencionó que en los elementos de Euclides se incluía según Boyer (2003) una teoría de proporciones o de igualdad de razones la cual aplicaron a distintas situaciones, por ejemplo, para un intervalo de tiempo, la distancia recorrida en un movimiento uniforme es directamente proporcional a la velocidad y análogamente para una velocidad dada, el tiempo es inversamente proporcional a la velocidad, en relación a esto Aristóteles pensaba que la velocidad de un objeto sobre la que actúa una fuerza motriz, dentro de un medio resistente, era directamente proporcional a la fuerza motriz e inversamente proporcional a la resistencia, lo cual contradecía el sentido común según los físicos (p.336).

Oresme estudia según Edwards (1979) “medir la cualidad sobre cada punto de un intervalo de referencia por un segmento de recta perpendicular sobre ese punto” (p.88) refiriéndose a dicho intervalo de una cualidad como su longitud, y su intensidad en un punto como su latitud o altitud en él, proponiendo el siguiente tratado expuesto en Cantoral y Farfán (2004) como sigue:

> Cualquier cosa medible, excepto números, es imaginada a manera de una cantidad continua. Por lo tanto, para medir tales cosas, es necesario que puntos, líneas y superficies o sus propiedades sean posibles de imaginar. Para éstas (las entidades geométricas), como los filósofos hacen, la medida o razón es encontrada de inicio …entonces, cualquier intensidad que pueda ser adquirida sucesivamente puede imaginarse como una línea recta perpendicular erigida sobre algún punto del espacio o aquello capaz de intensificarse, esto es una cualidad… (p.53)

De lo anterior, “dado que la cantidad o razón de líneas es mejor conocida y más fácilmente concebible,… entonces iguales intensidades serán designadas por líneas iguales” (Cantoral y Farfán, 2004; p.53). Similarmente, en atención a lo que precede, Boyer (2003) manifiesta que todo lo que varía se sepa medir o no, según Oresme, se podría imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo, para ello

> Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo en los que los puntos de una recta horizontal representa los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. Los extremos superiores de todos estos segmentos están en una recta, tal como lo vio Oresme, y si el movimiento uniformemente acelerado parte del reposo, entonces la totalidad de los segmentos velocidades (que nosotros llamamos ordenadas) cubren el área de un triángulo rectángulo. (p.339)

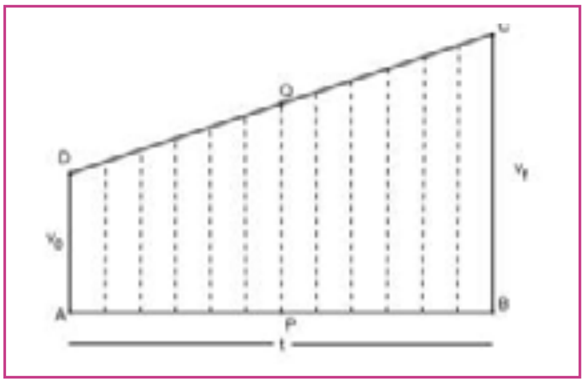


Figura 1: *Representación geométrica del Método de las Latitudes*

Edwards (1979) señala que Oresme observó que la definición de aceleración uniforme implica que en la Fig. 5, ***CD*** sea un segmento de línea recta, así la configuración es un trapezoide con base $AB = t$ y altura $AB = v_0$ y $BC = v_y$. "Él asume sin demostración explicita de ello que el área de ese trapezoide es igual a la distancia total recorrida" (p.89), lo cual de acuerdo con Cantoral y Farfán (2004) supuso basándose en el aspecto visual, observando desde su perspectiva a la configuración como constituida por muchos segmentos verticales o indivisibles, representando cada uno de estos una velocidad continua para un tiempo corto (p.53). En vista que el área de la Fig. 5 representa la distancia recorrida, obtiene Oresme de esta manera una verificación geométrica de la "regla del Merton College", "puesto que la velocidad en el punto medio del intervalo de tiempo es exactamente la mitad de la velocidad final de dicho intervalo" (Boyer, 2003; p.339). Es así, como este autor asegura que debido a los matemáticos Oresme y Bradwardine se obtuvo una concepción muy amplia y general de la proporcionalidad. (p.336). De hecho se menciona en Boyer (2003) que es muy seguro que Galileo estuviera muy familiarizado con la obra de Oresme que se conocía como "la latitud de las formas", dado que en las *Dos Nuevas Ciencias* (el cual es un diálogo sostenido en 1638, por Salviati, Sagredo y Simplicio) utiliza varias veces un diagrama de velocidades muy parecido a la representación gráfica triangular de Oresme dándole la precisión matemática de la que carecía (p.413).

FINALES DEL SIGLO XVII E INICIOS DEL SIGLO XVIII: LA RAZÓN ASOCIADA A CANTIDADES QUE SE APROXIMAN A CERO

En la Edad Moderna, nos encontramos con los trabajos de Fermat, Descartes, Barrow, Newton y Leibniz como grandes aportes para la matemática actual. Fermat "se interesó por muchos aspectos de lo que hoy llamaríamos análisis infinitesimal, tangentes, cuadraturas, volúmenes, longitudes de curvas, centros de gravedad, etc. (Boyer, 2003; p. 444). Cantoral y Farfán (2004) ilustran un método mediante el cual este matemático determinaba el valor extremo de algunas variables, el cual se encuentra inmerso en el método para hallar máximos y mínimos, dicho método se muestra en el siguiente planteamiento: Dado un segmento, hallar el punto sobre él, tal que el rectángulo que tiene por lados los dos segmentos que el punto determina sea de área máxima.

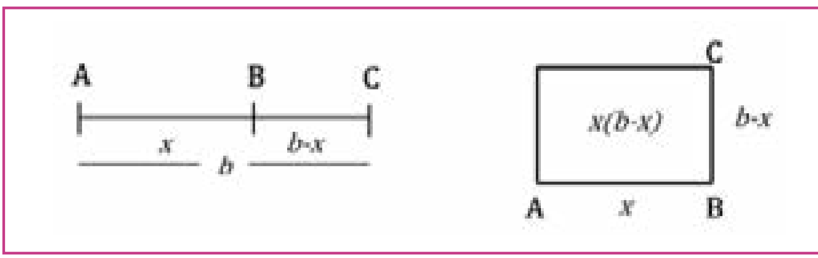


Figura 2: *Representación gráfica del método para determinar máximos y mínimos*

Sea $\overline{AC}$ el segmento dado en la Fig. 2 (izquierda), de longitud b , y sea B un punto sobre $\overline{AC}$. Tomemos como x a la longitud del segmento $\overline{AB}$, así que el segmento $\overline{BC}$ tiene por longitud $b - x$. De lo anterior, el rectángulo formado en la Fig. 6 (derecha) tiene área $x(b-x)$. Se pretende maximizar la expresión anterior, para lo cual se considera un punto adicional B' sobre $\overline{AC}$ de forma que la longitud $\overline{AB}$ sea distinta de x, es decir llegue, $x + \varepsilon$, y en consecuencia, el segmento $\overline{BC}$ tendrá longitud $b - (x + \varepsilon) = b - x - \varepsilon$. Además, el nuevo rectángulo construido será $AB'C$, con área $(x + \varepsilon)(b - x - \varepsilon)$. Acá, Fermat argumenta que si el punto B hace que el área sea máxima, entonces el valor del área determinada por B' será prácticamente igual al área determinada por B , de donde se obtiene que:

$$x(b-x) \approx (x+\varepsilon)(b-x-\varepsilon) \Rightarrow 0 \approx \varepsilon b - 2\varepsilon x - \varepsilon^2$$

Luego, se cumplirá la igualdad cuando $\varepsilon = 0$ y, por tanto $b = 2x$, de lo cual concluye que el rectángulo es un cuadrado de lado $x = \frac{b}{2}$. Analíticamente, se tiene que si B es un punto máximo (o mínimo) entonces, cuando ε se hace infinitamente pequeño, los valores de la función (en este caso el área del rectángulo construido) en x y en $x + \varepsilon$ van a ser muy cercanos, esto es, tomando a f como la función tratada, tenemos,

$$\varepsilon \approx \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{f(x+\varepsilon)} \approx \boldsymbol{f(x)} \Rightarrow \boldsymbol{f(x+\varepsilon) - f(x)} \approx \boldsymbol{0} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{f(x+\varepsilon) - f(x)}}{\varepsilon} \approx \boldsymbol{0}$$

Concluyendo de esta manera que la igualdad la tendrá cuando $\varepsilon = \boldsymbol{0}$. En notación moderna, si $\boldsymbol{B}$ es el punto máximo (o mínimo), entonces $\boldsymbol{f^1(x) = 0}$ cuando $\varepsilon \to \boldsymbol{0}$. Por su parte, Boyer (2003), presenta con una visión más general, el método en el que una función polinómica de la forma $\boldsymbol{y = f(x)}$ toma un valor máximo o mínimo. Fermat comparaba el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ en un cierto punto con el valor $\boldsymbol{f(x+E)}$ en un punto cercano; considerándose estos dos valores claramente distintos, "pero en una "cumbre" o en el fondo de un "valle" de una curva "lisa" la diferencia será casi imperceptible" (p. 440). Por lo tanto, para hallar los puntos que corresponden a los valores máximos o mínimos de la función este matemático iguala a , teniendo en cuenta que estos valores, aunque no son exactamente iguales, son "casi iguales". Cuanto más pequeño sea el intervalo E entre dos puntos, más cerca estará dicha seudo-igualdad de ser una verdadera ecuación; así pues, Fermat, después de dividir todo por $\boldsymbol{E}$, hace $\boldsymbol{E = 0}$. Este resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica. Además, permite vislumbrar la esencia del proceso que ahora llamamos diferenciación, pues el método de Fermat es equivalente a calcular $\boldsymbol{lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}}$ e igualar este límite a cero, pero Fermat aún no disponía del concepto de límite para esa época. Así, de acuerdo con Boyer (2003), el método de Fermat resulta, pues, equivalente a decir que el $\boldsymbol{lim_{E \to 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}}$ es la pendiente de la curva en el punto $\boldsymbol{x = a}$, pero lo cierto es que Fermat no explicó este procedimiento de una manera satisfactoria, limitándose a decir simplemente que era análogo a su método para determinar máximos y mínimos (p.441).

Asimismo, Descartes quien también trabaja en el contexto geométrico y es considerado uno de los fundadores de la geometría analítica junto con Fermat, se orienta en un principio fundamental de esta ciencia que dice que "cuando en una ecuación dos cantidades desconocidas se encuentran, se tiene un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva" (Cantoral y Farfán, 2004; p.74; Boyer, 2003; p.437). Descartes, explicita en la Géométrie lo siguiente:

> La Geometría no debería incluir líneas (es decir, curvas) que son como cuerdas, en el sentidos de que son a veces rectas y a veces curvas, ya que las razones entre líneas rectas y curvas no son conocidas, y creo que no pueden llegar a ser descubiertas por mentes humanas, y por lo tanto ninguna conclusión que se base en tales razones puede ser aceptada como rigurosa y exacta. (Boyer, 2003: p.432)

Boyer (2003) señala que, Descartes tenía mucha razón, sin duda, al afirmar que el problema de hallar la normal (o, equivalentemente, la tangente) a una curva era de gran importancia, pero el método que desarrolla en la Geómètrie no era tan directo ni fácil de aplicar como el que había desarrollado Fermat al mismo tiempo aproximadamente. Descartes sugería que para hallar la normal a una curva algebraica en un punto fijo ***P*** de dicha curva, se debería tomar un segundo punto variable ***Q*** sobre la curva, y hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas (puesto que utilizaba un único eje de abscisas) y que pase por los puntos ***P*** y ***Q*** . Igualando entonces a cero el discriminante que determina las intersecciones de la circunferencia con la curva, puede hallarse el centro de la circunferencia tal que ***Q*** coincide con ***P*** y, conocido el centro, pueden determinarse fácilmente tanto la normal como la tangente a la curva en el punto ***P***.

Posteriormente, Barrow hacia 1670 se interesa por los problemas de tangentes y cuadraturas, los cuales predominaban para ese período, adoptando las concepciones cinemáticas de Torricelli y considerando a las magnitudes geométricas como generadas por un flujo continuo de puntos.

Seguidamente, según Boyer (2003) Barrow se dispone explicar un método para la determinación de tangentes que es prácticamente igual al que se usa en el cálculo diferencial en la actualidad. Este método es muy parecido al propuesto por Fermat, pero en él aparecen dos cantidades, en vez de la única cantidad representada por Fermat por la letra ***E***, (cantidades que en notación moderna se conocen como Δx ***e*** Δy). Barrow explica su regla para la determinación de tangentes esencialmente como sigue:

> Si ***M*** es un punto de una curva dada (en notación moderna) por una ecuación polinómica ***f(x,y) = 0*** y si ***T*** es el punto de intersección de la tangente buscada ***MT*** con el eje ***x***, entonces Barrow considera "un arco infinitamente pequeño ***MN*** de la curva", las ordenadas correspondientes en los puntos ***M*** y ***N*** , y el segmento ***MR*** paralelo al eje ***x*** (Fig. 7). Llamando entonces ***m*** a la ordenada conocida de ***M***, ***t*** a la subtangente buscada ***PT*** y ***a, e*** a los catetos vertical y horizontal respectivamente del triángulo rectángulo ***MRN***. Tal como lo expresaríamos hoy, la razón de a para dos puntos infinitamente próximos es la pendiente de la curva (Boyer, 2003; p.488).

Para determinar esta razón Barrow procede de una manera muy parecida a como lo hizo Fermat (aunque los indicios hacen pensar que Barrow no conocía los trabajos de este matemático), sustituye ***x e*** en la ecuación ***f (x,y) = 0*** por ***x + e*** e ***y+a*** respectivamente, y en la ecuación resultante elimina todos los términos que no contengan ***a*** y ***e*** (ya que la suma de todos ellos es cero por la ecuación de la curva), así como los términos de grado mayor que uno en ***a*** o en ***e***, y por último reemplaza a por ***m*** y ***e*** por ***t***. A partir de este resultado puede calcularse la subtangente ***t*** en términos de ***x*** y de ***m*** y si ***x*** y ***m*** son conocidos, la subtangente ***t*** queda determinada, y con ella la tangente ***TM*** (ver figura 3).

Newton, según Boyer (2003), reconocía que el trabajo de Barrow no era más que el de Fermat un poco mejorado. Sin embargo, este trabajo le brindó el prestigio necesario para ser considerado uno de los matemáticos que anticiparon fragmentos del cálculo diferencial e integral, pero su insistente lealtad a los métodos geométricos le disuadió de continuar, motivando a Newton que estaba trabajando en los mismos problemas a publicar sus resultados propios (p.489). Newton comienza a pensar en 1665 “en la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que varían de manera continua o fluentes, tales como longitudes, áreas, volúmenes, distancias, temperaturas, etc” (p.493). Explica este autor que al año siguiente aún no había diseñado una notación para las fluxiones, pero ya había formulado un método sistemático de diferenciación que se parecía mucho al que publicó Barrow en 1670 en el cual:

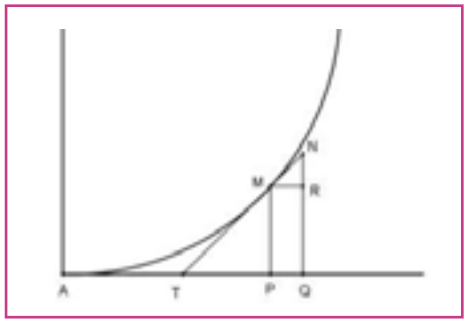


Figura 3: *Representación gráfica del método la determinación de tangentes de Barrow.*

> Sólo necesitaba sustituir la de ***a*** Barrow por la ***qo*** de Newton y la ***e*** de Barrow por la ***po*** de Newton para tener la forma inicial que dio Newton al cálculo. Evidentemente, Newton consideraba a ***o*** como un intervalo de tiempo muy pequeño, y a ***po*** y ***qo*** como los incrementos pequeños que experimentan ***x*** e ***y*** durante dicho intervalo. La razón ***q/p*** sería por lo tanto la razón entre las velocidades instantáneas del cambio de ***y*** y de ***x***, es decir la pendiente de la curva ***f(x,y)= 0***. (Boyer, 2003; p.498)

Sin embargo, al realizar una presentación de sus trabajos inherentes a sus métodos infinitesimales aproximadamente en 1671, consideraba a las variables ***x*** e ***y***, como cantidades que van fluyendo, o “fluentes”, de las cuales las cantidades ***x*** e ***y*** son las “fluxiones” o velocidades de variación (Boyer, 2003; p.499).

Para 1676, expone Boyer (2003), que Newton escribió una tercera exposición de su cálculo la cual llevaba como título De quadratura curvarum, y en dicha exposición trató de evitar, tanto las cantidades infinitamente pequeñas como las cantidades a las que llamaba fluentes, reemplazándolas por una teoría de las llamadas “razones primeras y últimas”. En relación a esto, el autor explica que:

> Newton calculaba la “razón primera de incrementos nacientes” o la “razón última de

incrementos evanescentes" de la manera siguiente: Supongamos que se quiere hallar la razón entre las variaciones de $\boldsymbol{x}$ y de $\boldsymbol{x^n}$; llamemos $\boldsymbol{o}$ a un incremento dado a la variable $\boldsymbol{x}$, y sea $\boldsymbol{(x + o)^n}$ el incremento correspondiente a $\boldsymbol{x^n}$. Entonces, la razón de estos incrementos será

$$\frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o x^{n-2} + \ldots}$$

Y para hallar la razón primera y última se debe dejar "desvanecerse" a $\boldsymbol{o}$, con lo que la razón buscada será $\frac{1}{nx^{n-1}}$. (pp.499-500)

Haciendo referencia a lo anterior, Boyer (2003) señala que "Newton está aquí realmente muy cerca del concepto de límite, aunque la objeción principal que se podía hacer sería al uso impreciso de la palabra ***desvanecerse***: ¿Es que existe realmente una razón entre incrementos que se han ***desvanecido***?" (p.500). Esta interrogante no será clarificada por los matemáticos hasta arribar siglo XVIII.

En 1687 se publica la ***Principia Matemática***, donde Newton trata con límite de razones de cantidades geométricas, de hecho, en la sección I del libro I titulado "El método de las razones primeras y las últimas entre cantidades" establece que "la última razón de cantidades que se aproxima a cero son simplemente el límite de su razón" (Edwards, 1979; p.226). Cantoral y Farfán (2004) hacen énfasis en este aspecto señalando que las últimas razones de cantidades evanescentes, no son las razones de las últimas cantidades sino los límites hacia los cuales se aproximan en menos que cualquier diferencia dada, pero nunca las alcanzan y que las fluxiones son las velocidades de variación de las cantidades a las que llamaba fluentes que actualmente conocemos como la derivada (p. 91-92). Además, Edwards (1979) afirma que Newton en el lema I del libro I de la ***Principia Matemática*** ensaya la definición del concepto de límite estableciendo lo siguiente:

> Las cantidades y las razones de las cantidades, que en cualquier tiempo finito convergen continuamente para la igualdad, y antes y después de ese tiempo se aproxima más cercanamente a otro que para cualquier diferencia dada, convirtiéndose finalmente en una igualdad. (p.225)

Por otro lado, Boyer (2003) manifiesta que hacia 1676 Leibniz había llegado a la misma conclusión a la que había llegado Newton varios años antes. Fuese para una función racional o irracional, algebraica o trascendente (nombre que se debe al mismo Leibniz), siempre se le podían aplicar sus operaciones de formación de sumas y diferencias; pero para ello se hacía necesario desarrollar un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos nuevos problemas. Por lo tanto, menciona que:

> Leibniz tuvo siempre una fina apreciación de la importancia que tiene una buena no-

tación para ayudar a los procesos de pensamiento, y la que eligió en el caso del cálculo era especialmente afortunada. Después de varios ensayos se decidió a representar por dx y dy las diferencias más pequeñas posible (o diferenciales) de las x y de la y, aunque inicialmente había usado en su lugar $\frac{x}{d}$ e $\frac{y}{d}$ para indicar la disminución del grado. (p.506)

Esta notación se ilustra en su método para determinar la longitud de una curva, de acuerdo con Cantoral y Farfán (2004), para determinar el triángulo diferencial de Leibniz de una curva $y = f(x)$se toma un incremento diferencial dx en la variable x y se calcula el incremento correspondiente dy en la variable $y = f(x)$. Finalmente se completa el triángulo donde es el incremento infinitesimal sobre la gráfica de $y = f(x)$ (p. 94) como se muestra en la Fig. 4.

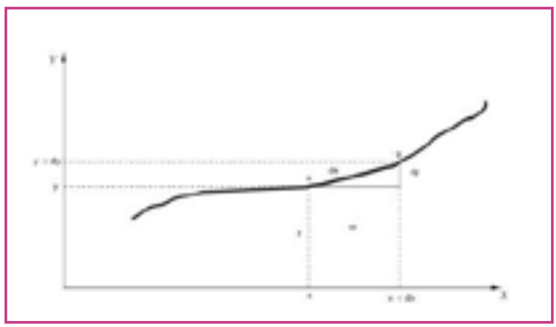


Figura 4: *Representación del triángulo característico de Leibniz*

Leibniz sostenía que, como el arco infinitesimal AB es indistinguible de la cuerda $\overline{AB}$, entonces el triángulo curvo es indistinguible del triángulo rectángulo que forma con ella. Así, Leibniz fue, uno de los mayores creadores de notación en la historia, más aún "fue el primer matemático de importancia en usar un punto para representar la multiplicación, y en representar las proporciones de la forma $a:b = c:d$" (Boyer, 2003; 509)

EL SIGLO XVIII E INICIOS DEL SIGLO XIX: APARECE LA NOCIÓN DE DERIVADA COMO LÍMITE DE UN COCIENTE INCREMENTAL

Al arribar al siglo XVIII, según Edwards (1979) nos encontramos con un Cálculo evidentemente indeciso; tales indecisiones persisten a lo largo de ese siglo, en donde Berkeley responde a que las dificultades asociadas con razones de fluxiones o diferenciales se pueden evitar reemplazando las últimas razones de las cantidades que se aproximan a cero, por razones de segmentos finitos de línea (p.294). Por su parte, Boyer (2003) explicita que:

> La descripción que hace Berkeley del método de las fluxiones es totalmente correcta y sus críticas están bien fundamentadas. En ellas hacía notar que al calcular o bien las fluxiones o las razones de las diferenciales, los matemáticos suponen en primer lugar que se les da ciertos incrementos no nulos a las variables para eliminarlos más tarde suponiéndolos iguales a cero (p. 539).

Este autor indica que el hecho de explicar el cálculo bajo estas premisas le parecía a Berkeley simplemente un juego de compensación de errores, y así "en virtud de un doble error se llega, aunque no a la ciencia, si a la verdad" (Boyer, 2003; p.540). Este matemático reprueba inclusive la explicación de Newton de las fluxiones en términos de razones primeras y últimas, negando la posibilidad de una velocidad literalmente "instantánea" en la que los incrementos de la distancia y del tiempo se han desvanecido para dejar en su lugar el cociente sin sentido ***0/0***. Más aún, en palabras del mismo Berkeley:

> ¿Y que son estas fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. ¿Y que son estos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, ni tampoco se reducen a la nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de cantidades desaparecidas? (Boyer, 2003; p.540; Edwards, 1979; p.294).

Ahora bien, con la intención de dar respuesta a estas y otras interrogantes de Berkeley, Edwards (1979) sintetiza que:

> El primer paso hacia la resolución de las dificultades de Berkeley definiendo explícitamente la derivada como un límite o un cociente de incrementos, en la manera sugerida pero no establecida con suficiente claridad por Newton, fue tomada por Jean d' Alembert (1717-1783) (p.295).

D' Alembert presenta según Edwards (1979) una representación de la derivada como el límite de un cociente de incrementos, escribiendo $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (p.296). Boyer (2003) por su parte menciona que en el artículo sobre diferencial que escribió para la Encyclopédie, D' Alembert aseveraba que "la diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en hallar los límites de las razones de diferencias finitas de dos variables incluidas en la ecuación" (p.567). Además, oponiéndose a los puntos de vista de Leibniz y de Euler, insistía D' Alembert en que "una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido; si no es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera" (Boyer, 2003; p.567). De acá, el autor señala que:

> Este punto de vista terminaría por excluir la vaga noción de las diferenciales como magnitudes infinitamente pequeñas, y D' Alembert sostenía que la notación de las diferenciales no es más que una manera conveniente de hablar, que depende, para su justificación del lenguaje de los límites. (p.567)

Asimismo, en el artículo del que se hizo mención arriba, se refiere a la obra *De quadratura curvarum* de Newton, en el cual D' Alembert interpreta las expresiones de Newton a las que él denominó "razones primeras y últimas" como límites y no como una primera o última razón de dos cantidades que están exactamente surgiendo al ser o desvaneciéndose, respectivamente.

Podríamos decir que este momento histórico la razón se asocia a la definición de derivada.

SIGLO XIX:
CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES COMO CORTADURAS DE DEDEKIND

En otro orden de ideas, durante la Edad Contemporánea, Dedekind, Cantor, Meray y Heine, construyen los números reales. De hecho, "el enfoque de Dedekind estuvo cercanamente relacionado a la definición de Eudoxo de proporcionalidad de razones de magnitudes geométricas" (Edwards, 1979; p.331).

Es así como Dedekind define un concepto de gran importancia en la actualidad como es una cortadura de números racionales explicando que es "una partición (A_1, A_2) de Q en subconjuntos no vacíos y disjuntos, tales que, todo elemento de A_1 es menor que todo elemento de A_2" (Edwards, 1979; p.331). Boyer (2003) hace alusión a esto afirmando que la definición de proporción dada por Eudoxo:

> No está muy alejada de las distintas definiciones de número real que se dieron a finales del siglo XIX puesto que lo que hace es separar la clase de los números racionales $\frac{m}{n}$ en dos subclases, según que $ma \leq nb$ o $ma \geq nb$, lo que genera una cortadura en el sentido de Dedekind (p. 128).

Dedekind se preguntó, según Boyer (2003), ¿qué es lo que distingue a las magnitudes geométricas continuas de los números racionales?, señalando en relación a esta inquietud que:

> En cualquier división de los puntos del segmento en dos clases tales que cada punto pertenezca a una y solo una de las dos clases, y tal que todo punto de una de las dos clases esté a la izquierda de cualquier punto de la otra clase, hay uno y sólo un punto que produce la división. (p.695)

De esta manera, la idea de cortadura de Dedekind en el dominio de los números racionales, o cualquier otra construcción formal equivalente de los números reales, ha venido a reemplazar así la idea de magnitud geométrica como columna vertebral del análisis (Boyer, 2003; p.696). En este período se puede decir que la razón está asociada a un número real.

A MODO DE SÍNTESIS: PARTE I

La aproximación histórica de los conceptos de razón y proporción llevada a cabo desde el comienzo del estudio nos permitió vislumbrar diferentes perspectivas de tales objetos matemáticos a través de cada época de acuerdo al o a los matemáticos representativos de la misma, según el punto de vista que cada uno tuviese. Cada período explica la manera en que los conceptos de razón y proporción evolucionaron a través de la historia desde los distintos contextos matemáticos, como, el aritmético, el geométrico, el algebraico, el físico, el analítico y el topológico hasta llegar a la definición actual de los conceptos en estudio. Encontramos que desde la Edad Piedra se utilizaban cantidades lo más pequeñas posibles a fin de evitar el uso de fracciones, pero los Pitagóricos introducen la notación de fracción y definen la razón como una relación entre dos números enteros (y positivos), además definen a una proporción como la igualdad de dos razones, cuya definición se mantiene vigente hasta nuestros días.

Al arribar a la Edad Antigua, en el siglo V a.C, se asocia la razón a magnitudes geométricas y aritméticas de acuerdo al estudio de diversos matemáticos de la época y sustentándose en la geometría analítica como pilar fundamental de la matemática, acá Eudoxo de Cnido logra acercarse a la definición de proporción conocida en la actualidad. Posteriormente, se produce un salto epistemológico y al alcanzar la Edad Media, a los objetos de investigación se les relaciona al concepto de velocidad en el movimiento uniforme. Sin embargo, durante la edad moderna y hasta inicios del siglo XIX, cambia drásticamente esta idea y se obtiene una estrecha relación de la razón asociada al concepto de derivada, donde se representa a la razón como un límite de cociente incremental, pasando previamente por el trabajo de Barrow, Fermat, Newton y Leibniz con las cantidades que se aproximan a cero y el método de las fluxiones. Finalmente, al encontrarnos en el siglo XIX, se observa cómo los conceptos investigados contribuyen a demostrar una importante propiedad de los números reales, como lo es la completitud de ese conjunto, mediante la definición de las cortaduras de Dedekind.

Percibimos que el análisis epistemológico efectuado podría permitir la comprensión de los conceptos de razón y proporción como objeto de estudio en los diferentes tópicos matemáticos, en especial en el cálculo diferencial, que es tan usado pero al mismo tiempo, es desconocido por los y las estudiantes en vista de que no está contemplado en el currículo. Además, de acuerdo a las distintas perspectivas encontradas en la historia, se debe tener en cuenta como educador, que en el momento de introducir un contenido que tenga implícito los conceptos de razón y proporción en el aula, precisemos concretamente, desde qué contexto se estudiará, a fin de evitar generar dificultades para los y las estudiantes en el futuro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko A. (2010). Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 535-543.

Bergé, C. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisada a través de los siglos. Aporte a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6 (3), 163-197.

Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática.* Madrid: Editorial Alianza.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo.* México: Thomson Editores.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer-Verlag..

Oller A. y Gairín J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 16(3), 317-338.

Salazar, M. y Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 207-215.

Valdivé, C. (2008). *Esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático.* Tesis Doctoral no publicada. UCLA-UNEXPO-UPEL.

Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(3), 413-450.

REPRESENTACIONES BIDIMENSIONALES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS. UNA EXPERIENCIA CON ALUMNOS DEL PROFESORADO.

Carlos F. Pesce

Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González".
Buenos Aires, Argentina
cfpescejvg@gmail.com

FECHA DE RECEPCIÓN: 30/12/17 FECHA DE ACEPTACIÓN: 14/03/18

RESUMEN

En el presente trabajo se presenta una investigación realizada con estudiantes del profesorado en matemática, en la ciudad de Buenos Aires, Argentina, cuyo objetivo es analizar la existencia de prototipos en las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos. En la experiencia se ha elegido el objeto pirámide a efectos de realizar el estudio sobre la base de cuatro consignas concretas a saber: la definición, el dibujo de dos pirámides distintas, la explicación del por qué de esa diferencia y el dibujo del desarrollo plano de las mismas. El análisis y la comparación de los resultados obtenidos se han hecho atendiendo al modelo de Van Hiele y otros trabajos citados.

PALABRAS CLAVE:
tridimensional - pirámide - definición - representación

ABSTRACT

This is a research carried out with students of mathematics teaching in Buenos Aires, Argentina. The objective is to analyze the existence of prototypes in two-dimensional representations of geometric figures. In the experience, the pyramid object has been chosen for the purpose of carrying out the study on the basis of four concrete aspects: the definition, the drawing of two different pyramids, the explanation of the reason for that difference and the drawing of the flat development of the same. The analysis and comparison of the results obtained have been made according to the Van Hiele model.

KEYWORDS:
pyramid - definition - representation

INTRODUCCIÓN
LA GEOMETRÍA EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

El discurso matemático escolar de los años 60 y 70, con el advenimiento de la llamada Matemática Moderna, se caracterizó por un enfoque excesivamente riguroso en la enseñanza de la matemática en general y de la geometría en particular (Ferrarós Domínguez, 1998). Con esa tónica se dejaron de lado concepciones intuitivas que constituyen una ventaja para el aprendizaje de las figuras y cuerpos geométricos junto con sus propiedades. De hecho, el surgimiento de la geometría como disciplina experimental se remonta a Egipto, para adquirir posteriormente un carácter puramente abstracto y riguroso con la obra de Euclides en Grecia.

Estudios recientes reconocen en nuestro país que es fundamental retornar a la comprensión de las propiedades geométricas y hacer hincapié en la visualización y en su utilización para la construcción de los conocimientos geométricos no limitando las actividades planteadas en el aula a la aplicación de algoritmos (Crespo Crespo, citada por Blanco, 2009, p.27).

En la enseñanza de la geometría prevalece el rigor propio del esquema axiomático y la deducción. Por otro lado, las aplicaciones prácticas están atravesadas por el manejo de procesos que están alejados de la intuición que conlleva la visualización.

En uno de los textos escolares que caracterizaron durante décadas el discurso escolar de la matemática moderna en Argentina, se da la siguiente definición: "Dado un ángulo poliedro y un plano secante, se llama pirámide a la parte del ángulo poliedro que se encuentra en el semiespacio respecto del plano que contiene al vértice del ángulo poliedro" (Repetto, Linskens y Fesquet, 1968, p.178).

El texto citado consta de una parte importante dedicada al estudio de la geometría del espacio con la estructura tradicional anteriormente descripta. En la definición de pirámide aparecen conceptos geométricos previamente definidos que el alumno debe conocer para entender y comprender que, de ese modo, el objeto geométrico queda unívocamente determinado para diferenciarlo de otros que se definen en capítulos previos y posteriores.

> En geometría, bajo un paradigma basado en el enfoque tradicional, se estudian primero las definiciones y propiedades de los cuerpos geométricos, sin haber tenido antes un acercamiento intuitivo que les permita dotar de significado a las definiciones y propiedades de los mismos (Blanco, 2009, p.29).

Sin lugar a dudas, en la actualidad, en contenidos de matemática en el nivel medio (y también en el superior), hay una marcada tendencia al desarrollo algebraico y al aprendizaje de índole algorítmica en detrimento de lo visual. En consecuencia, se evalúan las acertadas elecciones de "recetas" y la pericia en la aplicación de procedimientos de resolución.

La geometría del espacio es la gran ausente en los programas de matemática de la escuela secundaria. Sólo se trabaja la geometría del plano con los típicos problemas que consisten en el planteo de ecuaciones algebraicas para hallar las medidas de los lados de los polígonos, superficies o volúmenes, despojando a tales situaciones problemáticas del concepto puramente geométrico. Además, se le resta importancia porque los conceptos previos necesarios para asimilar los contenidos de años superiores no requieren del uso de la geometría. "Se considera conveniente usar la visualización creativamente, como una herramienta para el entendimiento. Teniendo en cuenta que la visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes en forma efectiva para descubrir conceptos matemáticos e interpretarlos" (Cantoral y Montiel, 2003, p.8).

Pensando en la representación bidimensional de objetos tridimensionales, se requiere un conocimiento y manejo adecuados de la geometría del plano. Sin embargo, según lo expresado más arriba, ese estudio de la geometría en la escuela secundaria queda relegado a nociones básicas que quedan perdidas en el universo de contenidos puramente algebraicos procedimentales y algorítmicos.

> El cambio dimensional, al que definimos como un proceso de identificación de configuraciones de dimensión diferente a la inicial, es fundamental en el desarrollo de las capacidades geométricas [...] hay que considerar que la mayor parte de la información ofrecida por los problemas de geometría es bidimensional, y el cambio dimensional se hace necesario para poder analizar la información desde una perspectiva unidimensional o tridimensional (Torregrosa y Quesada, 2007, p.285).

En este proceso de representaciones, se ponen en juego procesos cognitivos que permiten la interpretación de figuras planas para convertirlas en objetos tridimensionales y de estos objetos para transformarlos en conceptos geométricos, objetos de estudio de la geometría (Gutiérrez, 1998). Este proceso en el que la visualización que involucra la construcción de imágenes mentales no es inmediato, sino que requiere de etapas hasta lograr la construcción del conocimiento geométrico.

LA ADQUISICIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO EN LA ESCUELA

Dina y Pierre Van Hiele en su modelo sobre el desarrollo del pensamiento geométrico, subdivide en cinco niveles progresivos de adquisición del pensamiento geométrico, a saber: visualización o reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor. En lo que atañe a la enseñanza de la geometría del espacio, se hace imperiosa la necesidad de pensar la metodología empleada a partir del modelo de Van Hiele. Las nociones introductorias de geometría consisten en el estudio de figuras en el plano. El dibujo de un cuerpo geométrico (tres dimensiones) mediante su representación en el plano (dos dimensiones) genera cierta dificultad de comprensión, propiciando ideas erróneas y equivocadas dependiendo del tipo de perspectiva que se utilice.

El modelo de Van Hiele, en relación al trabajo con cuerpos geométricos, puede resumirse de la siguiente manera (Londoño Mejía y Zapata Acevedo, 2013; Guillén Soler, 2004; Vargas Vargas, Gamboa Araya, 2013):

- Nivel 1 (Reconocimiento). Los conceptos geométricos son considerados como entes globales. En este nivel, el alumno adquiere vocabulario, identifica elementos y figuras y cuerpos, pero no es conciente de sus propiedades pues manipula objetos concretos.

- Nivel 2 (Análisis). El alumno comienza a analizar conceptos geométricos y propiedades características de los entes geométricos, identificando y comprobando relaciones entre elementos de una figura o cuerpo. Pero no tiene conciencia de las relaciones entre las propiedades. Pone en juego el descubrimiento, la clasificación y la generalización a partir de la observación de casos y la experimentación.

- Nivel 3 (Clasificación). El alumno realiza clasificaciones de los objetos basadas en propiedades y se descubren nuevas propiedades a partir de otras conocidas. Su razonamiento es no es formal, si bien entiende y reproduce demostraciones formales sencillas, pero no es capaz de comprender el significado de deducciones formales. Recurre a ejemplos y figuras para dar explicaciones.

- Nivel 4 (Deducción Formal). En este nivel, el alumno comprende la importancia y relación entre términos, definiciones, teoremas y demostraciones. Realiza razonamientos lógicos formales y realiza deducciones propias.

- Nivel 5 (Rigor). El alumno puede trabajar en sistemas axiomáticos, comprendiendo a la geometría desde un punto de vista totalmente abstracto.

No en todos los niveles educativos ni en todos los temas de geometría, los estudiantes logran transitar por los cinco niveles. A veces, incluso puede encontrarse en un momento dado en distintos niveles para diversos contenidos.

“En un libro, en un artículo se transmite sólo el producto final, la imagen última con todos los elementos acumulados en ella, lo que resulta extraordinariamente engorroso de interpretar" (Guzmán, citado por Micelli, 2010, p.42). Efectivamente, no se explicita en detalle el trazado parcial de los dibujos de cuerpos geométricos que aparecen en los diversos textos destinados al aprendizaje. Los alumnos acceden de esta manera a representaciones finales rígidas, muchas veces marcadas por la presencia de prototipos de representación (Rey, 2004) característicos de la escuela.

Con una perspectiva que excede los objetivos de la presente investigación, el uso inteligente de la herramienta informática coadyuva indudablemente a entender algunas propiedades de los cuerpos geométricos al permitir su observación desde diferentes ángulos y perspectivas, lo cual representa una gran ventaja a los efectos de crear una imagen bidimensional más real del objeto tridimensional.

Los programas de diseño y animación en 3D promueven el ejercicio de conversión en forma automática a una figura geométrica plana a los efectos de la representación en la pantalla de un objeto de tres dimensiones. Los usuarios de esos utilitarios adquieren la destreza necesaria para que lo visualizado en dos dimensiones adquiera el aspecto y la apariencia de un objeto tridimensional. Por otra parte, la visión binocular permite que el sujeto adquiera la percepción de profundidad mediante el estímulo cerebral combinado de las retinas de ambos ojos en forma simultánea.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Se eligieron al azar a 11 estudiantes de primer año del profesorado en matemática en la ciudad de Buenos Aires, Argentina, que participaron de forma voluntaria. Se les propuso una actividad de cuatro consignas, en el siguiente orden:

1. Defina el objeto pirámide.
2. Dibuje dos pirámides distintas.
3. Explique por qué las pirámides dibujadas son distintas.
4. Elabore el desarrollo plano de sus dos pirámides.

Se dispone solo el registro escrito de la actividad en cuestión. Si bien para el análisis sólo cuenta lo vertido en el papel, una de las estudiantes hizo un comentario que resulta interesante considerar. La alumna comentó, al entregar la hoja, que recordaba a un profesor de matemática que hacía referencia a que el dibujo del cuerpo geométrico, sea cual fuere, es sólo una representación, haciendo alusión al carácter bidimensional de tal representación. "El distinguir entre un objeto y su representación determina un momento clave para el aprendizaje de la matemática, pues las representaciones no sólo son necesarias a los fines de la comunicación, sino también para la actividad cognitiva del pensamiento" (Blanco, 2009, p.19).

El objetivo de esta experiencia fue analizar desde el modelo de Van Hiele cuáles son los niveles que transitan los estudiantes en relación a los cuerpos geométricos, en particular de la pirámide.

ANÁLISIS DE LOS TRABAJOS

En la primera consigna, se pidió la definición del objeto pirámide. En los contenidos de matemática de nivel medio no se hace mención explícita al concepto de "definición". En los estudiantes que intervinieron se observa que han logrado tomar conciencia del proceso, a juzgar por lo escrito en cada uno de los casos.

"Crear y usar definiciones matemáticas es una actividad esencial y difícil para los estudiantes." (Rasmunsen, Zandieh, King y Teppo, citados por Escudero, Gavilán y Sánchez Matamoros, 2014, p.9). Sin embargo, por tratarse de futuros profesores, es importante que comprendan la importancia que tienen las definiciones en la construcción de los conceptos matemáticos.

En los contenidos del profesorado el concepto de definición, sus características y modalidades se trata sobre el final de la carrera, en la asignatura denominada Fundamentos de la matemática. Sin embargo, se trabaja con definiciones en el resto de las materias disciplinares desde primer año en el que se cursa ,además, la asignatura Geometría I que trata la geometría del plano y el espacio. En otros planes de estudio, en cambio, ambas asignaturas se cursaban en forma paralela.

"Las definiciones de conceptos matemáticos, las estructuras subyacentes de las definiciones y el proceso de definir deben ser componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemáticas" (Zazkis y Leikin, citados por Escudero et al., 2014, p.9).

Todos los estudiantes consideraron a la pirámide integrada por dos partes: la base, formada por un polígono cualquiera y las caras laterales (Figura 1, Figura 5). Todos, salvo uno, indicaron que tales caras son triángulos que confluyen en un punto. La mayoría describió a la base como un polígono cualquiera (Figura 1, Figura 2, Figura 3, Figura 4, Figura 5). En un caso se indicó que el polígono debía ser regular (Figura 6) y, en otro, que la base era cuadrada (Figura 7).

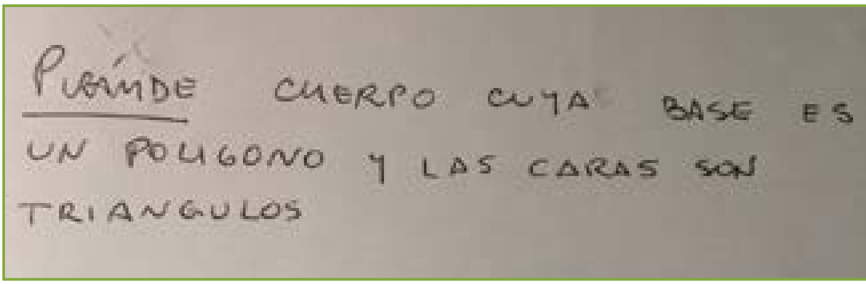


Figura 1: *Definición de pirámide dada por el Alumno A7*

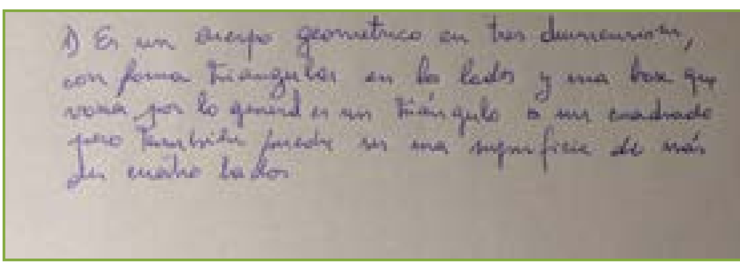


Figura 2: *Definición de pirámide dada por el Alumno A4*

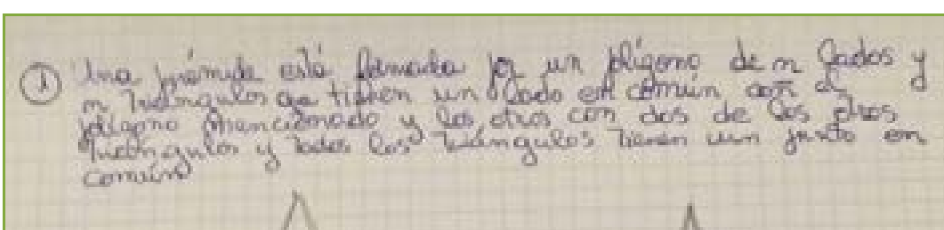
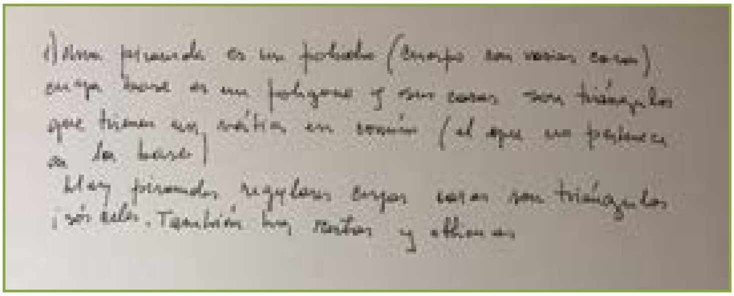
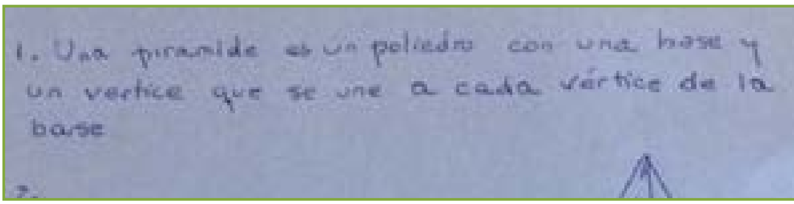


Figura 3: *Definición de pirámide dada por el Alumno A*



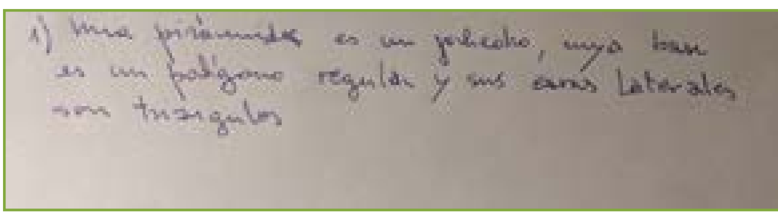
1) Una pirámide es un poliedro (cuerpo con varias caras) cuya base es un polígono y sus caras son triángulos que tienen un vértice en común (el que no pertenece a la base)
Hay pirámides regulares cuyas caras son triángulos isósceles. También hay rectas y oblicuas

Figura 4: *Definición de pirámide dada por el Alumno A5*



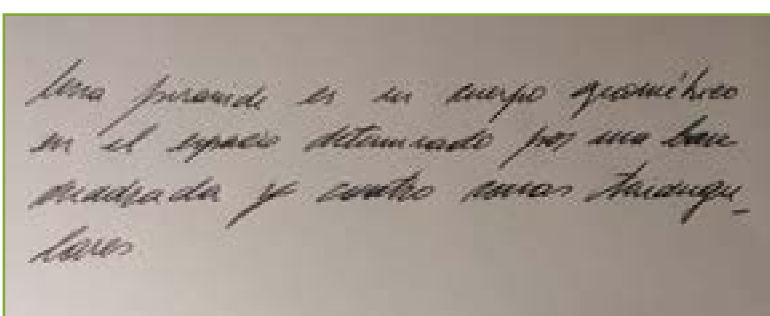
1. Una piramide es un poliedro con una base y un vertice que se une a cada vértice de la base

Figura 5: *Definición de pirámide dada por el Alumno A11*



1) Una pirámide es un poliedro, cuya base es un polígono regular y sus caras laterales son triangulos

Figura 6: *Definición de pirámide dada por el Alumno A2*



Una pirámide es un cuerpo geométrico en el espacio determinado por una base cuadrada y cuatro caras triangulares

Figura 7: *Definición de pirámide dada por el Alumno A8*

Las definiciones propuestas se limitan a veces a casos particulares (base cuadrada, base regular). Algunas son realizadas por género próximo y diferencia específica, por medio de la caracterización de ciertos poliedros (Figura 4, Figura 5, Figura 6) o cuerpos geométricos (Figura 1, Figura 2, Figura 7). En un caso, la definición dada es constructiva (Figura 3), ya que describe el objeto pirámide a través de pasos que permitirían su construcción.

En lo referente a definiciones, algunos alumnos muestran estar transitando el nivel 2 de Van Hiele por no lograr aún plena conciencia de las clasificaciones y generalizaciones a partir de propiedades y quedar en casos particulares en las definiciones, mientras que otros ya muestran que lo han superado, encontrándose en niveles superiores, ya que es en el Nivel 3 aquel en el que se logra definir correctamente.

La respuesta se percibe como una descripción del objeto pirámide en la mayoría de los estudiantes si se piensa en los requisitos que debe tener una buena definición, entre ellos, la elegancia. Esta cualidad se caracteriza por el empleo de la menor cantidad de palabras posible, la menor cantidad de símbolos si los hubiere y el uso de los términos generales más básicos, entre otros.

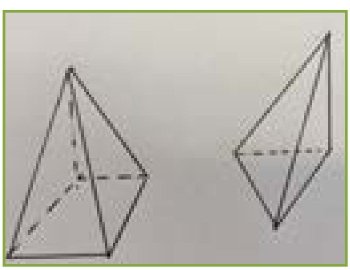


Figura 8:
Pirámides dibujadas por el Alumno A1

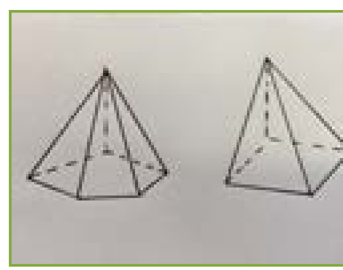


Figura 9:
Pirámides dibujadas por el Alumno A2

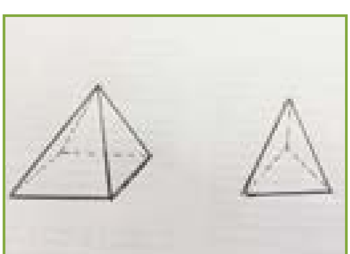


Figura 10:
Pirámides dibujadas por el Alumno A3

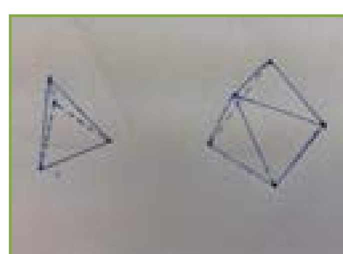


Figura 11:
Pirámides dibujadas por el Alumno A4

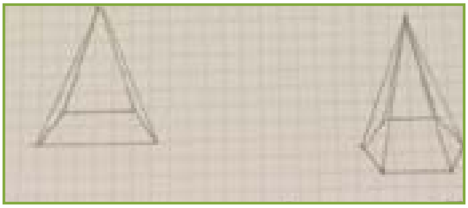


Figura 12:
Pirámides dibujadas por el Alumno A5

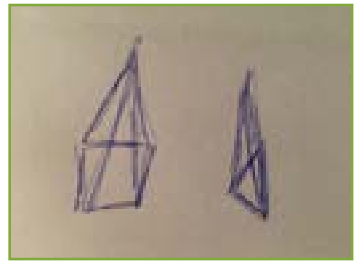


Figura 13:
Pirámides dibujadas por el Alumno A6

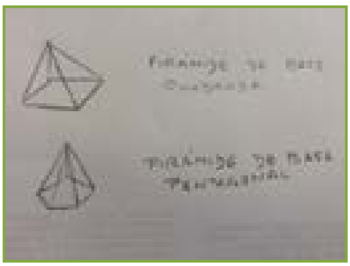


Figura 14:
Pirámides dibujadas por el Alumno A7

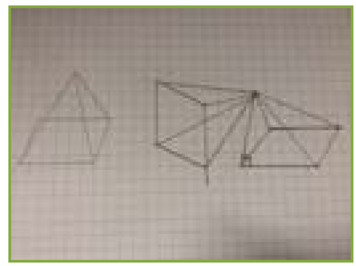


Figura 15:
Pirámides dibujadas por el Alumno A8

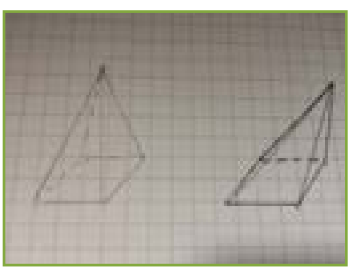


Figura 16:
Pirámides dibujadas por el Alumno A9

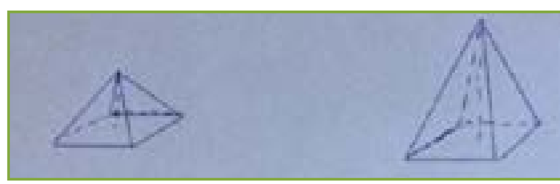


Figura 17:
Pirámides dibujadas por el Alumno A11

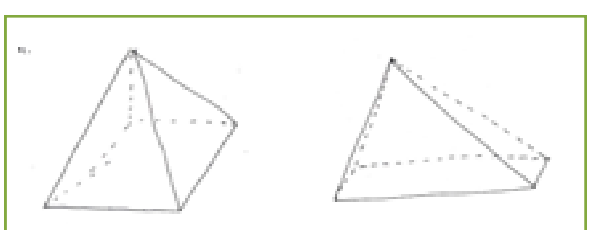


Figura 18:
Pirámides dibujadas por el Alumno A10

En relación a la segunda consigna, consistente en el trazado de dos pirámides distintas, se buscaba no solo analizar la representación gráfica del objeto recién definido, sino la identificación de la presencia de prototipos.

El prototipo de representación de pirámides utilizado usualmente en el discurso matemático escolar que ubica la base de la pirámide apoyada y su otro vértice por encima de ella se encuentra presente en estos dibujos. Asimismo, la convención de las representaciones en los libros de texto en lo que se refiere al trazado de las aristas no visibles con línea punteada es otro ejemplo a tener en cuenta según lo realizado por los alumnos. Los adornos de mesa y las pirámides egipcias constituyen, además, algunos ejemplos concretos más comunes de los que deriva la representación mental del objeto pirámide, colaborando al afianzamiento de estos prototipos.

Por otra parte, también se observa que 15 de las 22 pirámides son de base cuadrada 4 son de base triangular, dos de base pentagonal y una sola de base hexagonal, poniendo en evidencia que el prototipo de pirámide de base cuadrada está fuertemente arraigado.

En lo que atañe a la ubicación del vértice de la pirámide (el vértice del ángulo poliedro en el que confluyen las caras laterales), todos los alumnos, sin excepción, lo dibujaron en la parte superior (Figura 8, Figura 9, Figura 10, Figura 11, Figura 12, Figura 13, Figura 14, Figura 15, Figura 16, Figura 17, Figura 18). Por ejemplo, Hoz, citado por Haydee Blanco en su trabajo (Blanco, 2009), se refiere a la rigidez geométrica, entendida como la única forma de ver y dibujar un objeto geométrico o, en otras palabras, la incapacidad de esbozar un diagrama de manera distinta. Se da el ejemplo de un triángulo rectángulo rotado. En las Figuras 11 y 15, sin embargo, se observa cierto grado de rotación y dinamismo en este sentido.

Las explicaciones que dan estudiantes cuyos dibujos se muestran desde alumno A1 al A7, para fundamentar por qué las pirámides dibujadas son distintas, se refieren a la diferencia de los lados en el polígono de base (Figura 8, Figura 9, Figura 10, Figura 11, Figura 12, Figura 13, Figura 14). Sin embargo el alumno 11 dice que son distintas por tener alturas diferentes (Figura 17) y el alumno A8 por tener distintas alturas y "ángulos comprendidos" (Figura 15). Los alumnos A9 y A10 por tratarse de pirámides rectas u oblicuas (Figura 16, Figura 18), aunque A9 califica a la pirámide recta como "regular".

En relación a los desarrollos planos de las pirámides, el alumno A1 manifestó desconocer lo que representa el desarrollo plano. El resto de los alumnos realizan el desarrollo plano de una de las pirámides o de ambas.

Es posible identificar dos tipos de desarrollos; los que se realizaron a partir del polígono que sirve de base, dibujando luego cada una de las caras laterales denomina vértice de la pirámide (Figura 20, Figura 21, Figura 22 y Figura 23) y aquellos en los que se han dibujado las caras laterales en forma consecutiva con la base compartiendo una arista con alguna de ellas (Figura 19, Figura 24, Figura 26 y Figura 27).

El Alumno A6, presenta un desarrollo que corresponde al nivel 2 de Van Hiele, en el que las representaciones siguen sin dar sensación de profundidad, identificado como etapa esquemática espacial de la evolución de la habilidad de dibujo en perspectiva (Gutiérrez, 1998).

Los alumnos A2 y A5 (Figura 19 y Figura 22) dibujaron además las “aletas para pegar”, así lo manifiesta el último estudiante. Pensaron en el desarrollo a partir de la manera de construir la pirámide haciendo los recortes correspondientes en una cartulina, según se trabaja en la escuela. Esto puede deberse a no diferenciar entre los desarrollos planos y las plantillas de construcción de poliedros o a un exceso en la utilización de materiales didácticos concretos.

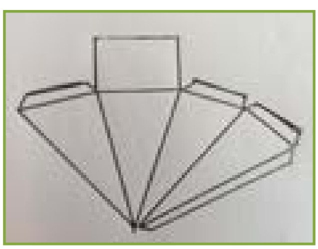


Figura 19:
Desarrollo de pirámide dibujada por el Alumno A2

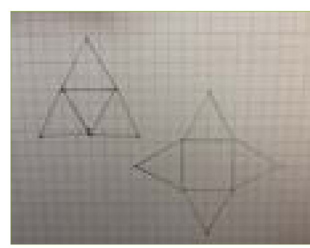


Figura 20:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A3

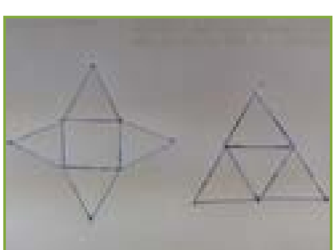


Figura 21:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A4

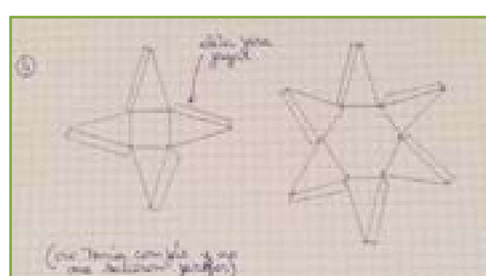


Figura 22:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A5

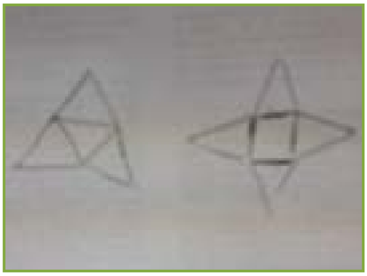


Figura 23:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A6

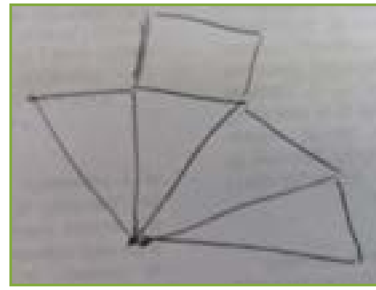


Figura 24:
Desarrollo de pirámide dibujada por el Alumno A7

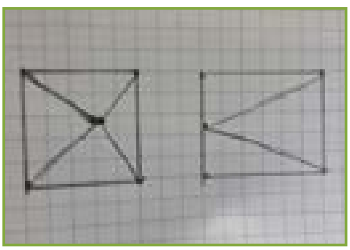


Figura 25:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A6

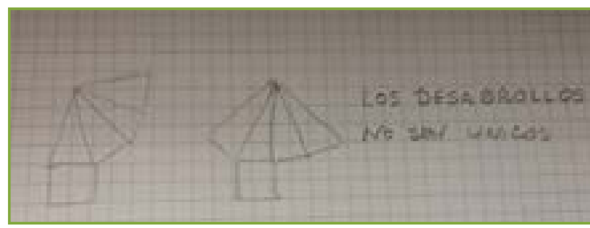


Figura 26:
Desarrollo de pirámide dibujada por el Alumno A7

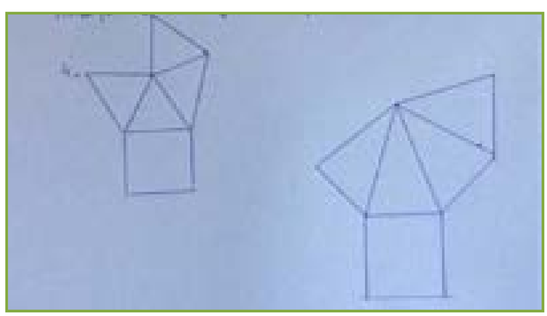


Figura 27:
Desarrollo de pirámides dibujadas por el Alumno A11

Algo que también puede comentarse de las respuestas obtenidas es que la mayoría de los alumnos utilizó útiles de geometría en las construcciones, llegando incluso A5 a afirmar que no tenía compás, por lo que no le "salieron parejas" las construcciones (Figura 22). Algunos alumnos, sin embargo realizaron las construcciones con carácter de figuras de análisis a mano alzada y sin rigurosidad geométrica (Micelli, 2010).

CONCLUSIONES

Del análisis de los trabajos realizados por los estudiantes se percibe la influencia del discurso matemático escolar pensando no sólo algunas de las características en común que se han evidenciado en las figuras sino también las descripciones vertidas de la tarea realizada.

Se notó el peso que la imagen de la pirámide recta y de base cuadrada, tiene en los alumnos, heredada de la forma en que se ejemplifica en los libros de texto y en las clases de geometría. Por otra parte, la posición en la que fueron dibujadas pone de manifiesto tal influencia. En efecto, la razón de ser de la segunda consigna estaba dada por la identificación de la presencia de prototipos.

Sin lugar a dudas, el material concreto que se utiliza y el armado de los sólidos a partir de sus desarrollos planos dibujados en cartulina, que también figuran en los libros, marcan notablemente la tendencia de las representaciones de los cuerpos geométricos. De todas maneras, no hubo unanimidad en cuanto a las formas de realizar tales desarrollos pensando en los clásicos que figuran en las publicaciones y que conviven.

La mayoría de los estudiantes utilizó la regla para realizar la tarea. Esa costumbre proviene de la lógica exigencia del uso de los elementos de geometría en las clases, en especial, la regla no graduada y el compás en la geometría métrica estudiada en primer año del profesorado.

Algunos alumnos fueron precisos en el lenguaje geométrico empleado en las definiciones. Otros no utilizaron los vocablos específicos pero explicaron bien sus dibujos en líneas generales. A pesar de ello, las definiciones dadas hicieron referencia a casos particulares en su gran mayoría.

A partir del modelo de razonamiento geométrico del matrimonio holandés Van Hiele, algunos alumnos muestran estar transitando, para algunos conceptos matemáticos, el segundo nivel por no haber logrado aún plena conciencia de las clasificaciones y generalizaciones a partir de las propiedades y quedarse en los casos particulares descriptos. Otros estudiantes, en cambio, ya muestran que lo han superado, puesto que en el nivel tres ya logran definir en forma correcta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de los cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Cantoral R. y Montiel, G. (2003) Una representación visual del polinomio de Lagrange. *Números* 55, pp. 3-22.

Escudero, I.; Gavilán, J. y Sánchez Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 17 (1), 7-32.

Ferrarós Domínguez, J. (1998). El enfoque conjuntista en matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 1(3), 389-412.

Guillén Soler, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática 16* (3), 103-125

Gutierrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA 3* (3), 193-220.

Londoño Mejía, A. y Zapata Acevedo, Y. (2013). *Enseñanza de la pirámide teniendo como base las fases de aprendizaje de Van Hiele.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Repetto, C.; Linskens, M. y Fesquet, H. (1968). *Álgebra y Geometría: Tomo 2.* Buenos Aires: Kapelusz.

Rey, J. L. (2004). Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos o cuando los modelos ayudan, pero no tanto. *Premisa 6* (22), 3-12.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (2), 275-300.

Vargas Vargas, G. y Gamboa Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA 27* (1), 74-94.

DIFICULTADES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN UN ENFOQUE ALGEBRAICO

Carlos Oropeza Legorreta, Cecilia Crespo Crespo

Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM, México
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", Buenos Aires, Argentina.

coropeza96@hotmail.com, crccrespo@gmail.com

FECHA DE RECEPCIÓN: 29/01/18 FECHA DE ACEPTACIÓN: 11/03/18

RESUMEN

Nuestro estudio pretende dar a conocer las dificultades que los estudiantes enfrentan al resolver problemas de corte algebraico. En este trabajo se reportan algunas experiencias recopiladas en diversos cursos de álgebra para estudiantes de ingeniería, así como de un taller y un diplomado relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la selección de los problemas se consideraron las recomendaciones vertidas por Polya. Algunos de los resultados obtenidos ponen de manifiesto que la carencia en el manejo de información básica de álgebra provoca en la mayoría de los casos que los estudiantes no logren relacionarla con nuevos conceptos.

ABSTRACT

Our study aims to introduce the difficulties that students face up to solve algebraic problems. In this paper we report some experiences collected in several courses about algebra for undergraduate students, as well as a workshop and a diplomat both related with teaching and learning of mathematics. In the selection of problems we are considerate the recommendations made by Polya. Some of the results obtained show that the lack in handling basic concepts of algebra causes in most cases that students fail to relates them with new concepts.

PALABRAS CLAVE:

dificultades - problemas algebraicos - estrategias - solución

KEYWORDS:

algebraic problems – strategies - solution

INTRODUCCIÓN

Con frecuencia en las escuelas de ingeniería en México, es común escuchar la opinión tanto de profesores como de estudiantes acerca de que los programas de estudio son extensos y atienden con poco énfasis el proceso de construcción de conceptos, análisis, argumentación y creación de ideas, propiciando con ello una visión reduccionista de dichos programas. Al parecer, existe el común denominador de centrar la atención de los cursos en la solución de ejemplos que en su mayoría incluyen soluciones algorítmicas.

Los factores que influyen en la aparición de dificultades en el aprendizaje del álgebra son numerosos y de distinta naturaleza. Por ello se considera importante lograr en los estudiantes bases académicas sólidas que permitan desarrollar posteriormente la disciplina. En el aula, cada vez se reconoce más el valor que posee la introducción de ejercicios, problemas y actividades que representen un reto para los estudiantes y les permitan explorar sus conocimientos matemáticos en busca de soluciones a los cuestionamientos planteados. En su resolución ponen en juego sus estrategias cognitivas y su capacidad de análisis. Deben utilizar todos los recursos que tengan disponibles que les permitan ensayar distintas soluciones y ponerlas a prueba para validarlas hasta obtener la que consideren adecuada.

En la actualidad, los recursos tecnológicos brindan la posibilidad de cerciorarse si la solución obtenida es correcta, pero también permiten visualizar características de los objetos matemáticos involucrados en un problema planteado para poder hacer hipótesis y conjeturas que se orienten a la resolución del mismo. Por un lado, favorecen la motivación y por otro brindan elementos que permiten que los estudiantes comprendan que las matemáticas son una parte fundamental en la formación de ingenieros y que no se encuentran alejadas de lo que los rodea, como muchos las catalogan, porque muchas veces el lugar en que posicionan a las matemáticas se debe a lo poco prácticas y tediosas que se presentan las clases.

En relación al aprendizaje del álgebra realizadas en el marco del PME (Psychology of Mathematics Education), grupo de discusión formado en el ICME (Internacional Congress on Mathematical Education), muchas de las investigaciones se han centrado en la manera en la que los estudiantes abordan la resolución de ecuaciones, identificándose tres tipos de enfoques básicamente: intuitivo, sustitución por tanteo y formal. Los primeros involucran el uso de propiedades numéricas, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento. En los problemas que requieren representaciones verbales, es usual la utilización de estrategias informales que no requieran de símbolos algebraicos, de manera que se basan en ensayo y error para encontrar respuestas acertadas. En oportunidades, los alumnos pueden aplicar estrategias informales para lograr la representación numérica de la ecuación algebraica para encontrar la solución (Mayer, 1985), pero los procesos de transición desde lo intuitivo a lo formal suelen resultar complejos para aquellos que aplicaron estrategias informales en un inicio (Heffernan y Koedinger, 1997; Mayer, 1982; Nathan, Kintsh y Young, 1992).

Los fundamentos algebraicos son necesarios para el desarrollo adecuado de un curso de álgebra en escuelas de ingeniería. En nuestra investigación nos orientamos a reflexionar para poder recobrar evidencias que permitan fundamentar la necesidad de profundizar el análisis de las respuestas de los estudiantes, y poder estructurar diseños de situaciones didácticas que promuevan la solución de problemas desde diversas estrategias. En ellas, consideramos que la tecnología debe estar disponible para que ante un problema planteado, pueda ser utilizada como un instrumento de manera adecuada.

FUNDAMENTACIÓN

En la actualidad, las distintas corrientes de la didáctica de la matemática, reconocen el papel que juegan en la construcción del conocimiento matemático, la intuición y el abordaje informal inicial de los conceptos. Para el constructivismo, este proceso es resultado de interacciones previas que se dan en contextos no establecidos formalmente para el aprendizaje de los principios del álgebra. El conocimiento que se obtiene de manera informal se debe ser tenido en cuenta para desarrollar el conocimiento formal de los aspectos semánticos y sintácticos de álgebra. El docente debe tomar conciencia de que los alumnos comprenden los principios del álgebra como resultado de actividades que parten de la aritmética. Estas se trabajan desde los primeros años de la escuela y es en la educación secundaria cuando se comprende la relación con los conceptos de álgebra. El pasaje de la aritmética al álgebra no es inmediato, es un proceso en el cual muchas veces los alumnos pasan por etapas en las que afrontan con éxito problemas de adicción, sustracción y multiplicación, a través de un amplio conjunto de estrategias pero presentan dificultades en el trabajo con operaciones algebraicas que demandan procesos más complejos y abstractos. La comprensión del significado de igualdad, el uso de literales, las relaciones entre los símbolos, son algunas de las dificultades a las que deben enfrentarse los estudiantes. En los niveles en los que se inicia el estudio más formal del álgebra, es donde se encuentra mayor fracaso escolar (Grupo Azarquiel citado por Gavilán Bouzas, 2011). Es el procesamiento lógico y abstracto involucrado en la comprensión de las relaciones entre los símbolos que suponen una conexión con materiales o entidades concretas la que supone una gran complejidad para los alumnos. El enfoque aritmético de un problema supone la descomposición del mismo en subproblemas más sencillos, hasta llegar a la solución; el enfoque algebraico implica la identificación de las variables intervinientes y de los parámetros para, buscar las relaciones entre ellos y conseguir expresarlas en términos algebraicos, dando lugar a una o varias ecuaciones que aún deben ser resueltas (Gavilán Bouzas, 2011).

A continuación se caracterizan las 4 fases que George Polya (2002) menciona en la resolución de problemas:

- 1. Comprensión del problema. La persona que va a solucionar el problema deberá poder separar las principales partes del problema que son la incógnita, los datos y la condición. Se deben considerar estas partes atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema, se debe dibujar y destacar en ella las incógnitas y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente introducir una notación adecuada.

- 2. Concepción de un plan. Se tiene un plan cuando se sabe, al menos a "grosso modo", qué cálculos, qué razonamientos o construcciones se habrán de efectuar para encontrar la incógnita. Lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan.

- 3. Ejecución del plan. Para lograrlo, hace falta el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, paciencia, etc. Se debe verificar cada paso del plan concebido y asegurarse de su exactitud.

- 4. Visión retrospectiva. Reconsiderando la solución de un problema, reexaminando el resultado y el camino que condujo a ella, se podrían consolidar los conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas. Es recomendable verificar la solución, especialmente si existe un medio rápido e intuitivo de asegurar la exactitud del resultado o del razonamiento. Al reconsiderar la solución de un problema se presenta la oportunidad de investigar sus relaciones. Polya (2002, p.5) menciona también:

> *Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de cada problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar en cuanto el descubrimiento y el goce del triunfo… por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ello el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.*

En la actualidad, entre los recursos didácticos que se disponen en el aula, se encuentran los recursos tecnológicos que van desde el uso de calculadoras hasta la utilización de software generales o específicos para ciertas áreas de la matemática. El uso que puede hacerse de ellos en el aula es diverso. Rabardel (2011), afirma que pueden desempeñar el papel de simples artefactos cuando se trata de algo susceptible de uso, pero que llegan a convertirse en instrumentos cuando se combina con las habilidades del sujeto que los asume como propios. En el aula, los artefactos deberían convertirse en instrumentos para el para la construcción del conocimiento o su aplicación a la resolución de problemas. El papel del profesor y de las actividades que proponen son fundamentales para este proceso.

MÉTODO

La recopilación de la información que se presenta en este trabajo, es producto de tres puestas en escena de los problemas seleccionados en dos diplomados y un taller impartidos para profesores de bachillerato en la UNAM (Universidad Nacional Autónoma de México). En total se trabajó con aproximadamente 50 profesores. Durante su desarrollo se les solicitó la solución en forma individual de tres problemas uno a uno. Se les pidió bosquejar su solución a partir de su propuesta esquematizada; posterior a ello, modelar las ecuaciones y finalmente su solución. Después se les pidió la conformación de diferentes equipos para que discutieran de esta forma sus propuestas y, una vez unificadas sus opiniones, exponer los planteamientos al resto del grupo. Al término de la participación de cada uno de los equipos se dio tiempo para efectuar una retroalimentación a manera de conclusión. Además, que se aplicó durante dos semestres con estudiantes de ingeniería en la materia de algebra lineal como una herramienta de exploración; durante el periodo de trabajo, se les proporcionaron los mismos ejercicios que fueron entregados a los profesores y se les solicitó que les dieran solución. La diferencia entre profesores y alumnos es que a los alumnos se les pidió resolver los problemas algebraicos haciendo uso de software matemático, siendo estos GeoGebra y Maple. De igual manera que con los profesores, se pidió que conformaran equipos de 5 personas para llevar a cabo la solución de los ejercicios; una vez resueltos, se dio una retroalimentación.

A continuación se muestran algunas de las producciones resultantes de estas instancias, en las cuales se dan evidencias de los desarrollos analizados, los cuales son la base de la exploración que hemos realizado. Los problemas que se plantearon fueron tomados de Perelman (1978) y se muestran las soluciones propuestas para algunos de ellos por uno de los profesores participantes en el taller antes mencionado y por uno de los equipos de alumnos a los que se aplicó esta propuesta.

SOLUCIONES APORTADAS POR LOS PROFESORES

Problema 1

A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, la una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez? Suponer que los dos pájaros vuelan a la misma velocidad.

En la figura 1 se puede ver la propuesta de solución presentada.

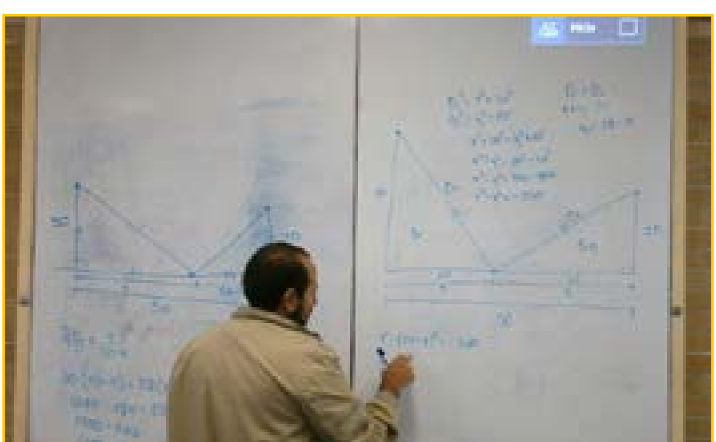


Figura 1. *Propuesta de solución al Problema 1*

En la imagen se puede apreciar que un equipo utilizó dos métodos distintos de solución; en ambos casos comenzaron con una representación gráfica de los datos, en el primer método resuelven el problema a través de razones y proporciones, mientras que en el segundo plantean el teorema de Pitágoras, consideran distancias iguales, asignan variables y desarrollan algebraicamente hasta llegar a la solución.

Problema 2

Un artel de segadores debía segar dos prados, uno tenía el doble de superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el artel?

La figura 2 muestra una propuesta de solución.

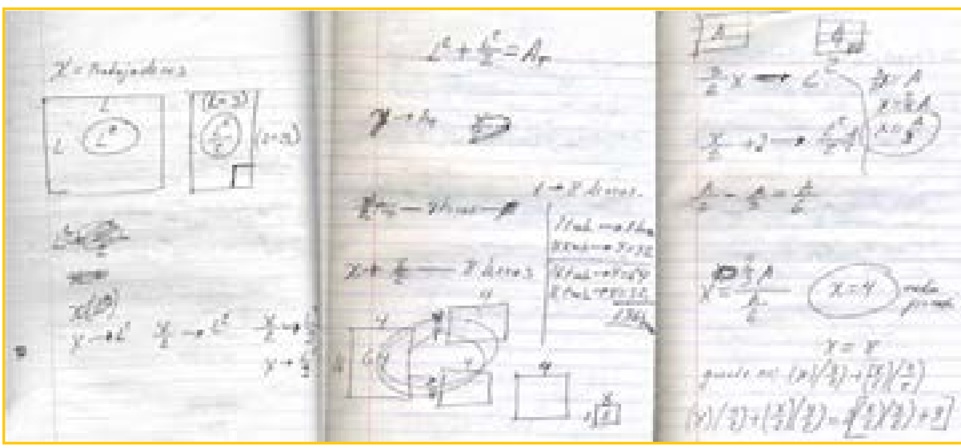


Figura 2.
Propuesta de solución al Problema 2

En este caso, se presentan tres imágenes distintas, todas son soluciones realizadas por el mismo equipo. En las dos primeras imágenes se utilizan los gráficos para representar el problema, en ambas, manifiestan incertidumbre al rayar las posibles soluciones, dando como producto final un problema sin solución aparente. En la tercera imagen, se privilegia el uso del álgebra, tomando información de las dos imágenes anteriores para poder otorgar variables, valores, y de esta manera, llegan al resultado final.

En la figura 3 se puede apreciar el planteamiento de solución de manera resumida por un equipo participante en el diplomado impartido para profesores de nivel bachillerato.

El objetivo del diplomado fue implementar el uso de herramientas tecnológicas en las aulas, utilizar éstas como instrumento verificador de resultados, para mejora en el aprendizaje y entendimiento de las matemáticas en los alumnos. Los participantes mostraron una actitud positiva en su participación, el trabajo en equipo se produjo casi de manera instantánea toda vez de que se manifestaron los roles que asumirían cada uno de ellos, la parte algebraica no presentó problemas salvo al pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico y donde los profesores presentaron cierta resistencia fue en el momento de utilizar el software matemático como instrumento verificador de resultados.

Figura 3.
Objetivos y propuesta metodológica implementada por los participantes.

Es necesario mencionar que las propuestas de solución que se expusieron de manera grupal se estructuraron después de haber vivenciado un trabajo en equipo y de llegar a una solución de los problemas planteados. En esta parte de retroalimentación se discutieron cada uno de los procesos utilizados por los participantes y se pudo observar que como primer paso normalmente se recurre a la representación gráfica y visual, ya que de esta manera según ellos es más fácil identificar el problema para solucionarlo, luego comenzó la interpretación algebraica, otorgando valores a incógnitas, en algunos casos hubo que presentar más de una opción para poder llegar a la solución final. Lo más destacado de dicha experiencia fue que los profesores manifestaron un amplio conocimiento teórico de la materia, más no un buen manejo del software matemático.

SOLUCIONES APORTADAS POR LOS ESTUDIANTES

Los alumnos trabajaron en equipos de 5 personas, una vez entregados los ejercicios a resolver procedieron a leerlos y analizarlos, después de eso comenzaron a intercambiar ideas sobre distintas maneras de llegar a la solución, eligieron el procedimiento que desde su punto de vista era el más factible para encontrar el resultado y lo aplicaron hasta obtener un producto final, una vez resueltos los problemas en forma analítica, ingresaron los datos en el software matemático (GeoGebra o Maple, según su preferencia), el sistema arrojó un resultado el cual fue comparado con el obtenido anteriormente y concluyeron que estaban en lo correcto, de lo contrario, corregían hasta encontrar el error en sus operaciones.

Problema 1

En las figuras 4 y 5 se aprecia la solución del enunciado del problema 1, presentada por un equipo de alumnos de primer semestre de la carrera.

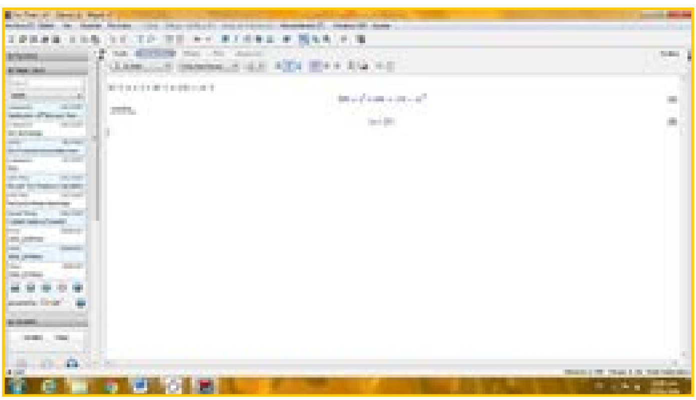


Figura 4. *Solución del problema a través de Maple*

Figura 5. *Representación gráfica del problema con el uso de GeoGebra*

Las imágenes anteriores muestran la solución del problema 1 a través de software matemático, como podemos notar los estudiantes representan en la figura 5 los datos y consideraciones realizadas en su propuesta, toda vez de que ya lo habían resuelto de manera analítica ingresan los datos en el software para la verificación de estos (figura 4). Como se puede distinguir los estudiantes presentan una clara afinidad por el uso de los recursos tecnológicos y privilegian de manera natural comprobarlos a partir del uso de software.

Problema 2

A continuación se presenta la solución del problema aportado por un equipo de estudiantes de algebra lineal del primer semestre de la carrera.

Solución:

Siendo x el número de segadores del artel y y el área que siega un trabajador en un día: la primer parte del día, los segadores trabajaron el prado grande, con lo que segaron, en términos de ***x*** y ***y***, tenemos $x * \frac{y}{2}$ del área de ese prado. Durante la segunda mitad del día, una mitad de los segadores trabajaron en el prado grande y la otra mitad en el pequeño; cada mitad de trabajadores segó $\frac{x}{2} * \frac{y}{2}$ del área de cada prado, con lo cual se concluyó la siega del prado grande y quedó faltando por segar un área pequeña del prado pequeño, la cual ocupó todo el día siguiente a un solo segador. De lo anterior, podemos saber que el área del prado grande es $x * \frac{x}{2} + \frac{y}{2} * \frac{y}{2}$ y la del prado pequeño es $\frac{x}{2} * \frac{y}{2} + y$. Además, sabemos que el prado grande tiene el doble del área que el pequeño, por lo que nos da como resultado $x * \frac{y}{2} + \frac{x}{2} * \frac{y}{2} = 2\left(\frac{x}{2} * \frac{y}{2} + y\right)$.

Mediante esta interpretación, podemos obtener el resultado final con ayuda del software Maple (Figura 6):

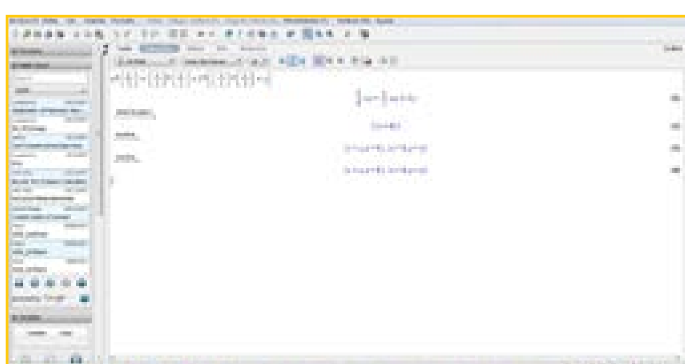


Figura 6.
Solución del ejercicio con Maple.

A través del software, los estudiantes pueden comprobar los resultados que obtuvieron de forma analítica, corregir y obtener visualizaciones más precisas de los elementos que contienen los problemas algebraicos.

Problema 3

En seguida se presenta la solución realizada por un equipo de estudiantes de segundo semestre de álgebra lineal, analíticamente y a través del software matemático. Lo destacado de su participación consiste en que este equipo caracteriza de manera clara la asignación de variables y la relación que guardan entre sí.

Solución: Siendo u, v, w y x las cantidades de rublos de los hermanos en el orden dado en el problema. Tenemos que $u+2$, $v-2$, $2w$ y $\frac{x}{2}$ son iguales.

Igualando las tres primeras cantidades iguales con la cuarta, se tiene que $u = \frac{x}{2} - 2$, $v = \frac{x}{2} + 2$, $w = \frac{x}{4}$.

Además, sabemos que $u + v + w + x = 45$. Resolviendo este sistema de ecuaciones en Maple, obtenemos la solución del problema. (Figura 7)

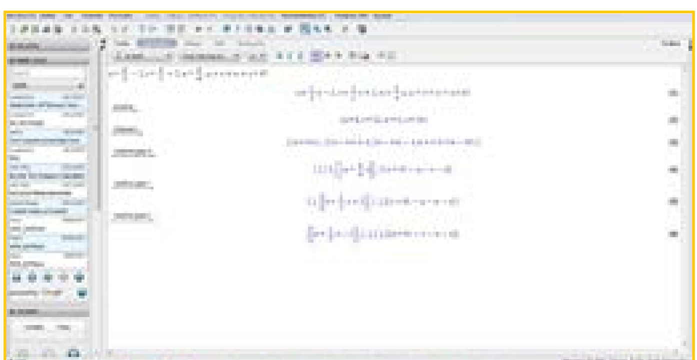


Figura 6.
Solución final del ejercicio con Maple

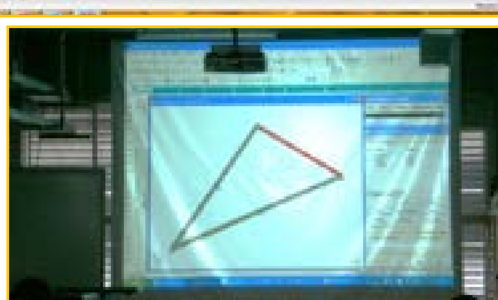


Figura 8.
Uso del software como un instrumento verificador de resultados

En los resultados incluidos por parte de los estudiantes, se pudo observar que los problemas que contienen enunciados con una extensión considerable y que incluyen tres o más variable representan un nivel alto de dificultad. Sin embargo, la solución del problema 3 fue prácticamente la misma que la que presentaron los profesores, de igual manera manifestaron dificultad en el transito del lenguaje común al lenguaje algebraico. Con respecto a la utilización del software matemático, es importante destacar la manera tan natural que los estudiantes manifiestan para manejar la tecnología como un instrumento de apoyo en su formación profesional.

Por otro lado queremos declarar que por motivos de espacio ya no fue posible incluir mayor número de imágenes para continuar con nuestra explicación. También se dejarán abiertas interrogantes con la intención de que los estudiantes reflexionen sobre los tan socorridos métodos mecanicistas. Esto sin dejar de lado lo relevante que resulta hacer un uso adecuado de los procesos algebraicos.

Hasta el momento continuamos realizando algunas modificaciones en cuanto a las condiciones en que los grupos de trabajo resuelven los problemas: tiempo de resolución, número de integrantes, apoyos a los cuestionamientos que hacen durante la actividad, etc.

CONSIDERACIONES FINALES

Actualmente estamos conscientes que hace falta consolidar y tener mayor precisión en la estructura de los diseños incluidos en nuestro trabajo. Sin embargo, con la participación de diversos grupos en esta modalidad estamos seguros de encontrar una serie de recomendaciones que utilizaremos para retroalimentar nuestro proyecto y aportar información que pueda contribuir en la labor docente.

Por otra parte, se vuelve necesario y sumamente relevante enfatizar en la fortaleza que puede alcanzar un alumno, al potenciar racionalmente sus fundamentos algebraicos. Las matemáticas implican, por tanto, estructuras y relaciones que deben manifestarse a partir de experiencias concretas. Las tareas del aprendizaje de las matemáticas involucran innumerables componentes que tienen su origen en la jerarquía de la experiencia y en cada una de las etapas del desarrollo psicomotor del pensamiento cuantitativo.

El objetivo de nuestro estudio es mostrar los beneficios que tiene dar un cambio en la enseñanza de las matemáticas implementando el uso de software matemático; este fue realizado en una comunidad de profesores y estudiantes, a los cuales se les entregó una serie de ejercicios que resolvieron según sus conocimientos, la diferencia entre profesores y alumnos fue que los profesores resolvieron los ejercicios analíticamente y solo utilizaron el software matemático para comparar sus resultados, mientras que los alumnos se apoyaron en el software matemático de su preferencia para complementar y facilitar su trabajo, y así poder llegar al resultado correcto. Por lo tanto, es importante mencionar que hay que potenciar estas capacidades desde una etapa temprana, con ayuda de las recomendaciones adquiridas a través de profesores y alumnos, relacionarlas con el manejo de situaciones cotidianas, el uso de tecnologías, y de software como Maple, GeoGebra y otros, que ayuda a la visualización de los problemas y les facilita a los alumnos en el razonamiento de los ejercicios para poder encontrar la solución, y con esto motivar a los interesados a alcanzar una mayor capacidad de comprensión del álgebra.

En los grupos participantes de ingeniería analizamos que el buen funcionamiento en la parte tecnológica se debe a que ya antes habían tenido algunos otros cursos que hacen uso del software matemático. También concluimos que a pesar de que los recursos tecnológicos motivan a llegar a un resultado correcto las dificultades en la solución de problemas algebraicos siguen existiendo otras variables por atender como por ejemplo: el tránsito entre representaciones.

Con la caracterización de este trabajo se muestra que el uso de software puede ayudar y facilita a los alumnos en la compresión de las matemáticas para la solución de problemas, ya que si llegan a un resultado incorrecto, pueden comprobarlo con ayuda de programas matemáticos. También observamos que cuando en los resultados existía una diferencia al verificarlos por sus propios medios, les impulsaba a buscar el error hasta encontrarlo, este hecho consideramos que podría ser utilizado en otros estudios de áreas diversas lo que podemos considerar como una contribución de nuestra propuesta. Mediante este estudio, se demostró que la mayoría de la comunidad estudiantil está familiarizada con el concepto y uso de software matemático como instrumento de apoyo en el aula, mientras que los profesores participantes muestran resistencia a utilizarlo y pocos son los que manejan este tipo de herramientas en sus cursos de manera convencional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Connell, M.L. (1995). A constructivist use of technology in pre-algebra. Paper presented at *the Seventeenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, OH, October 21-24.

Gavilán Bouzas, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Investigación en la escuela 73*, 95-106.

Heffernan, N. y Koedinger, K.R. (1997). The composition effect in symbolizing: therole of symbol production vs. text comprehension. En M. G. Shafto y P. Langley (Eds.): *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 307-312). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1995). A research base suppporting long term algebra reform? Paper Presented at the *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, OH, October 21-24.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Arlington, VA: National Science Foundation.

Koedinger, K.R., Alibali, M.W. y Nathan, M.J. (1999). A developmental model of algebra problem solving: trade-offs between grounded and abstract representations. Paper presented at the *Annual Conference for American Educational Research Association*. Montreal, May 23-26.

Mayer, R. (1982). Different problem-solving strategies for algebra word and equation problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 8, 448-462.

Mayer, R. (1985). Mathematical ability. En R. J. Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information processing approach* (pp. 127-150). New York: Freeman.

Nathan, M.J., Kinstch, W. y Young, E. (1992). A theory of algebra word problema comprehension and its implications for the design of computer learning environments. *Cognition and Instruction*, 9, 329-389.

Perelman, Y. (1978). *Álgebra recreativa*. Ed. Mir. Moscú. Traducción al español en 1978.

Polya. G, (2002). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Trillas.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

¿UN POSIBLE ERROR EN LA “GÉOMÉTRIE”?: DESCARTES Y LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PAPPUS

Jorge Enrique Mendoza Guzmán
Universidad del Valle, Colombia
jorge.mendoza@correounivalle.edu.co

FECHA DE RECEPCIÓN: 31/05/17 FECHA DE ACEPTACIÓN: 16/03/18

Mendoza Guzmán, J. (2018). ¿Un posible error en la "Géométrie"?: Descartes y la solución del problema de Pappus.
Premisa 20 (78), 52-69

RESUMEN

En este artículo se presenta un análisis histórico- epistemológico que muestra la manera como Descartes introduce las ecuaciones algebraicas y resuelve el problema de Pappus.De esta forma inaugura la geometría analítica, asociando ecuaciones a las curvas. Uno de los resultados principales de este trabajo es el hallazgo de un posible error al establecer una proporción en la solución del problema de Pappus.

ABSTRACT

This paper presents a historical- epistemological analysis. It refers to the manner which Descartes inserts the algebraic equations and solve the Pappus´ problem. In this sense, Descartes inaugurates the analytic geometry. Itassociates anequation to curves. One of the main results of this paper is the discovery of a mistake in the solution of the Pappus´ problem. I found that it was in the proportion approach.

PALABRAS CLAVE:

curvas – ecuaciones - lugar geométrico

KEYWORDS:

curves – equations - locus

INTRODUCCIÓN

Históricamente la incorporación de las curvas geométricas a la Matemática ha sido un proceso complejo en relación a la manipulación de las mismas. Cabe señalar que dichas curvas son aquellas que son generadas por cortes transversales de un cono, mediante regla y compás o intersecciones de cónicas, destacándose así la parábola, el círculo, la recta entre otras. De hecho, desde la antigüedad griega se manipulaban dichas curvas en formasintética, es decir como cortes transversales de un cono. Justamente los antiguos tenían una clasificación para este tipo de curvas:

La primera, conocida con el nombre de lugares planos, contenía a todas las líneas rectas y circunferencias; la segunda, conocida como la de los lugares sólidos, estaba constituida por todas las secciones cónicas; y la tercera categoría, conocida como la de los lugares lineales, agrupaba a todas las curvas restantes. El nombre dado a la segunda clase venia sugerido sin duda por el hecho de que las cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada, sino que se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional por un plano (Boyer, 2010, p. 133).

Esta clasificación presupone para los antiguos la existencia de familias de curvas; las cuales en la *Geometría* de René Descartes (1596-1650) son clasificadas como curvas geométricas y mecánicas, siendo las últimas aquellas que son generadas por dos o más movimientos independientes, tales como la trisectriz, la cicloide entre otras.

La *Geometría* se constituye en un aparato teórico novedoso, debido a que introduce operaciones para los segmentos, como multiplicación, división y radicación de segmentos. Así mismo, establece una metodología y simbología particular para resolver problemas. De hecho, Descartes propone los siguientes pasos para resolver un problema:

- 1) Suponer que el problema está resuelto
- 2) Interpretar el problema algebraicamente; esto es, trasladarlo al lenguaje de las ecuaciones y resolverlo con los métodos propios del álgebra
- 3) Verificar que la solución satisface los requerimientos del problema

Estos pasos propuestos por Descartes, inauguraron un método para resolver algunos problemas geométricos. Uno de los elementos claves en la obra de Descartes es el tránsito que va de las curvas a las ecuaciones, y la forma de establecer una relación biunívoca entre el objeto curva y su ecuación asociada. En este sentido, este artículo pretende mostrar la manera en que Descartes acoge las curvas geométricas, en particular la solución del problema de Pappus y encuentra la expresión que soluciona dicho problema. Cabe señalar que en la revisión bibliográfica de la *Geometría* cartesiana, específicamente en la edición de 1637 (Descartes, 1637), se ha detectado un posible error al establecer una proporción en la solución del problema de Pappus.

El problema de Pappus

Pappus de Alejandría (290 a.C-350a.C) realiza una gran compilación, organización, clasificación y generalización del conocimiento proveniente de las obras de sus antecesores, en su obra la colección matemática. En este sentido se comparte la idea de (Sefrin-Weis, 2010) quién establece que:

> La colección IV de Pappus puede leerse y fue entendida, como un unificado, coherente y esencialmente un exhaustivo reconocimiento de la tradición geométrica clásica desde el punto de vista de los métodos.(Sefrin-Weis, 2010, p. XIV)

Al igual que Menecmo, Arquímedes, Euclides y Apolonio, Pappus hace distinción entre la clasificación de los problemas, planos, sólidos y lineales. Los primeros se limitan a las construcciones mediante círculos y líneas rectas. Los problemas sólidos pueden ser solucionados mediante el uso de las secciones cónicas y los lineales involucran los dos anteriores, es decir pueden resolverse utilizando círculos, líneas y secciones cónicas.

Al igual que sus predecesores, Pappus se interesa por los tres problemas de la antigüedad griega considerando la duplicación del cubo y la trisección del ángulo como problemas que pertenecen a los sólidos y considera la cuadratura del círculo como un problema lineal.

Pappus brinda un tratamiento a las curvas y utiliza las secciones cónicas para resolver problemas tales como la manera de generar alguna de las secciones cónicas (curvas) dadas tres o cuatro líneas (rectas). Aunque Apolonio y Euclides se plantean estos tipos de problemas preguntándose por el lugar generado dadas cierta cantidad de líneas y ángulos conocidos. Sin embargo, el problema en general queda sin resolver hasta Descartes quién reconoce la manera de encontrar una curva o lugar geométrico, donde el elemento principal es la introducción de las ecuaciones algebraicas y una notación especial para los segmentos.

De tal forma, como lo establece (Arboleda, 2012, p. 3), el problema de Pappus pertenece a la clase que hoy conocemos como problemas *de lugar geométrico* en cuanto a su solución comporta la construcción de una curva algebraica. Pero cabe preguntarse si ¿Pappus era consciente de que su planteamiento en realidad correspondía a la generación de curvas? La respuesta a este interrogante es sí, y se presenta en el hecho de que Pappus soluciona el problema para dos y tres líneas.

En la solución del problema de Pappus se evidencia un uso implícito de un sistema coordenado, aunque no necesariamente este sistema se encuentra constituido por dos rectas perpendiculares como se usa modernamente, sin embargo en el tratamiento dado por Descartes se vislumbra la dependencia entre los términos conocidos y desconocidos. Para precisar un poco veamos cómo se constituye el problema y cómo su solución se convierte en un fuerte indicador de la manera de producir curvas y asociarles una ecuación algebraica.

Por ejemplo, Pappus se pregunta por el lugar generado dadas dos líneas rectas, dos ángulos y una razón dada. Justamente el caso de dos líneas rectas dadas corresponde a un lugar plano. La siguiente construcción detalla un poco esto. De acuerdo con (Arboleda, 2012) consideremos dos rectas, ***L*** y ***M*** , dos ángulos α y β y una razón θ conocidos. Luego se asignan p_1 , p_2 como las distancias desde la recta ***L*** al punto ***P*** y la distancia de la recta ***M*** al punto ***P*** respectivamente. El problema consiste en encontrar los puntos ***P*** de tal forma que la proporción $\frac{p_1}{p_2} = \theta$ se mantenga constante.

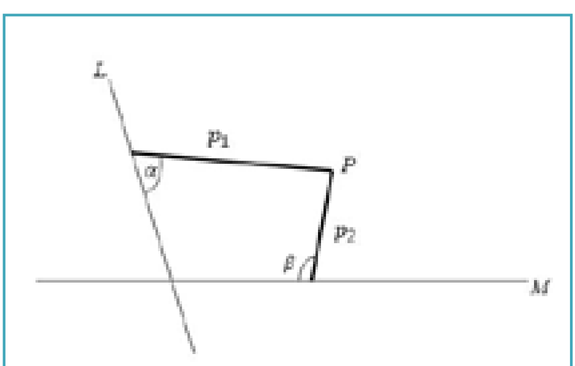


Figura 1:
Problema de Pappus para dos líneas rectas dadas

Ante todo Pappus no resuelve el problema para una mayor cantidad de líneas rectas, el que se encarga de desentrañar este problema geométrico y dar cuenta del lugar geométrico generado es Descartes, en su segundo libro de la geometría *Sobre la naturaleza de las líneas curvas*.

De esta forma Descartes visualiza la posibilidad de aplicar su nuevo método a los problemas que estuvieran asociados a una situación geométrica en particular. Es así como problema de Pappus adquiere una gran estatus en la manera de ver los problemas de orden lineal.

En la *Geometría*, Descartes referencia a Pappus en el sentido de que se evidencia la lectura previa de Descartes a la obra de Pappus llamada la *colección*, exactamente en el libro VII de Pappus se expone el problema para n líneas sin una solución evidente.

Pappus establece:

> Si son dadas tres líneas rectas en posición, y si son trazadas otras tres líneas rectas desde un mismo punto formándose ángulos conocidos con las tres líneas dadas, y si, a su vez, es conocida la proporción del rectángulo formado por dos de las líneas trazadas con el cuadrado de la otra, entonces el punto se encuentra en un lugar sólido, dado en posición, es decir, sobre una de las tres secciones cónicas. Y si, de nuevo, se trazan líneas sobre cuatro rectas dadas en una determinada posición, en ángulos dados, y se da la proporción del rectángulo formado por dos de las trazadas con el formado por las otras dos, entonces y de modo semejante el punto se encuentra en una sección cónica Por otra parte, se ha demostrado que únicamente a dos líneas, el lugar del punto no es de los que son conocidos; es de los llamados simplemente líneas, sin conocerse nada más sobre su naturaleza o propiedades. Una de ellas, no la primera, pero sí la más clara, ha sido examinada, siendo de utilidad. Las proposiciones relacionadas con las mismas son éstas (Descartes, 1637, p. 399).

De acuerdo con Descartes, Pappus es consciente de que el lugar generado corresponde a una sección cónica, más aún, que existe una manera de producir cónicas donde la situación geométrica es un elemento que particulariza el problema. Por esta razón aparece una concepción que relaciona los sólidos y un conjunto de premisas que anteceden la curva generada. En otras palabras, se está reivindicando una unión entre los entes lineales (líneas, rectas) y los entes sólidos, que constituyen el trasfondo conceptual de base para producir y conocer las propiedades de una curva. Sin embargo Pappus presupone un problema para el caso de que el número de líneas sea mayor que cuatro, ¿Qué lugar es generado para cinco líneas o más? Indudablemente Pappus no logra caracterizar la naturaleza, ni las curvas para este tipo de consideraciones, pero sí establece la directriz del problema:

> Para cinco líneas rectas, dadas en posición, sobre otras rectas bajo ángulos dados, y se da la proporción entre el paralelepípedo rectángulo comprendido bajo tres de las trazadas y el paralelepípedo rectángulo comprendido bajo las otras dos y otra línea dada, el punto se encontrará sobre una cierta línea,… (Descartes, 1637, p. 400)

Esta manera de plantear el problema presupone que el problema propuesto, podría ser solucionado, sin embargo, Pappus presenta señales referentes a una posible solución, mas no lo resuelve debido a la carencia de aparato teórico al identificar que la solución caería sobre una línea.

Aunque Pappus plantea el problema, es Descartes quien da respuesta al mismo, realizando una caracterización y generalización del problema para una mayor cantidad de líneas rectas dadas, tal como se introduce en (Álvarez, 2000, p. 43).

> Descartes en ningún momento señala explícitamente la naturaleza de la línea o lugar geométrico de los puntos que dan solución al problema para   líneas… Destaca de inmediato la clasificación de curvas en grados.

Casos	**Cantidad de líneas rectas**	**Se hallan los puntos con:**
1	3,4,5	Regla y compás
2	6,7,8,9	Geometría de sólidos (secciones cónicas)
3	10,11,12,13	Línea curva de un grado mayor que las secciones cónicas
4	14, 15, 16, 17…	Línea curva de un grado mayor que la precedente

Tabla 1:
Caracterización y generalización para el Problema de Pappus

En este sentido el problema de Pappus comienza a sufrir un proceso de organización provista por Descartes y no cabe duda que este problema representa en Descartes un punto clave al escribir la geometría, en el sentido de que permite la aplicabilidad de un aparato teórico constituido fundamentalmente por elementos de la teoría de proporciones de Euclides, los aportes y las propiedades de las curvas descubiertas por Apolonio y el simbolismo algebraico procedente de la notación utilizada por Vieta.

El problema de Pappus consiste en encontrar el lugar generado dado cuatro rectas y cuatro ángulos. Como primer paso Descartes da cuatro líneas ***AB, AD, DF, GH,*** como se muestra en la figura.

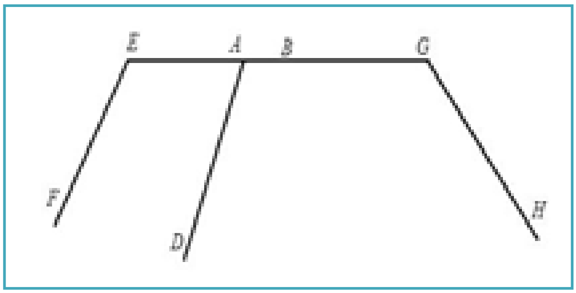


Figura 2
Rectas dadas para el problema de Pappus

Luego de ello supone un punto ***C*** como la solución del problema, de tal forma que al realizar ciertas prolongaciones sea posible encontrar una ecuación que me permita hallar las líneas rectas que pasan por el punto ***C*** en términos de cantidades conocidas y desconocidas, de esta manera se interrelacionan segmentos.

Como punto de partida Descartes supone que el problema está resuelto; siendo el punto ***C*** la solución, luego asigna las cuatro rectas dadas en posición mas no se da su longitud de las mismas, siendo estas ***AB, AD, EF, GH*** los ángulos se dan en términos de trazar las líneas desde el punto ***C***; ***CB, CD, CF*** y ***CH***. y sus respectivos ángulos dados $\angle CBA, \angle CDA, \angle CFE, \angle CHG$. A continuación realiza asignaciones para las líneas dadas, siendo $AB=x, BC=y$ la asignación dada para estas dos líneas radica en el hecho de que se utilizan como sistema referencial que más tarde servirá como parte de la solución del problema que se traduce en una "ecuación" en términos de dos variables. En este momento Descartes utiliza el sistema referencial que modernamente se puede traducir como las coordenadas (x,y) .

Aunque el sistema dado por Descartes es oblicuo, no se separa mucho de la idea moderna debido a que para cada segmento y ó x que suponga conocido, puedo encontrar uno en términos del otro. Es decir posee la idea de tabular (Fig. 3). Descartes logra establecer la siguiente cadena de igualdades.

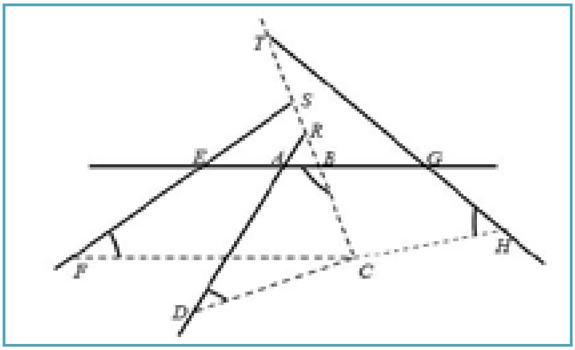


Figura 3
Ángulos dados para el problema de Pappus

$$\frac{AB}{BR}=\frac{z}{b};\frac{CR}{CD}=\frac{z}{c};\frac{BE}{BS}=\frac{z}{d};\frac{CS}{CF}=\frac{z}{e};\frac{BG}{BT}=\frac{z}{f};\frac{TC}{CH}=\frac{z}{g}$$

Para mostrar que los "ángulos del triángulo ***ARB*** son dados" observemos que el ángulo $\angle BAR$ es dado, porque subyace de dos rectas dadas que son ***DA*** y ***AB***. También el ángulo $\angle ABR$ porque es el suplemento de $\angle CBA$, y $\angle BRA$ es el suplemento de $\angle BAR$ y $\angle ABR$. A continuación la proporción ***AB*** y ***BR*** es conocida surge del hecho que como los ángulos ***ARB*** y ***BAR*** son conocidos entonces ***sinARB:sinBAR=AB:BR***. El procedimiento anterior se puede aplicar para los otros triángulos presentes en la (Fig.3) donde la magnitud ***z*** representa una magnitud- parámetro que sirve para medir y establecer las proporciones dadas.

Al establecer la siguiente proporción pareciera ser que se obtuviera un error.

Al parecer cuando se aplica la ley de los senos para los demás triángulos que se muestran en la (figura 3)se encuentra el siguiente error. En la *Geometría* (Descartes, 1637, p. 28), precisamente en la parte donde se establece la siguiente proporción $\frac{CR}{CD}=\frac{z}{c}$ ***(1)***. El error radica en que al realizar el proceso minuciosamente determinado las proporciones dadas, nos lleva al resultado de que $\frac{CR}{CD}=\frac{c}{z}$ ***(2)***. lo cual contradice lo supuesto por Descartes. Y si se tomara la proporción (2) los resultados esperados para segmentos como ***CD*** tendrían otra forma algebraica. Para subsanar este problema considero que Descartes debió haber considerado la proporción ***CD***: ***CR***, sin embargo como z representa un parámetro que se supone constante para el resto de proporciones establecidas con cierto artificio se puede subsanar dicho error.

$$\frac{CR}{CD}=\frac{\sin DRC}{\sin CDR}=\frac{\sin ARB}{\sin CDR}=\frac{z}{c}$$

Después de encontrar la manera de relacionar segmentos y ángulos conocidos con desconocidos, de establecer proporciones y de valerse de las propiedades de la semejanza de triángulos, Descartes aplica el procedimiento mencionado en su libro I.

> En primer lugar supongo la cosa ya hecha, y para aclarar la confusión entre todas estas rectas, considero una de las dadas y una de las que se deben encontrar, por ejemplo ***AB*** y ***CB***, como las principales y a las cuales trato de referir todas las demás. Sea ***x*** el segmento de recta ***AB***, entre los puntos ***A*** y ***B***; y sea y el segmento ***BC***… (Descartes, 1637, p. 28)

De esta forma, Descartes sintetiza la representación de los segmentos a una escritura un poco más simple, así la respectiva asignación para los segmentos inicialmente dados adquiere la forma ***EA=k*** , ***AG=l*** , ***AB=x*** , ***BC=y*** , con lo que la figura dada para el problema de cuatro líneas se transforma en

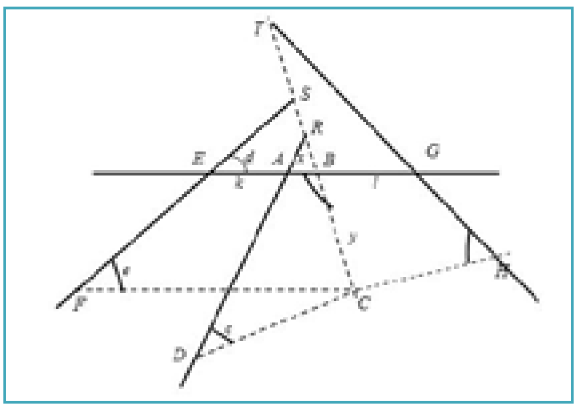


Figura 4
Asignaciones de las rectas y ángulos en posición

Se tienen en cuenta la cadena de igualdades dada al inicio y con base a la asignación y conocimiento de los segmentos y ángulos conocidos y desconocidos, se obtienen las siguientes igualdades:

$$RB = \frac{bx}{z} \text{(Puesto que se establece la razón } \frac{AB}{RB} = \frac{z}{b} = \frac{x}{RB}\text{)}$$

Puesto que ***BC =y*** la línea ***CR*** se expresa como:

$$CR = BC + RB = y + \frac{bx}{z}$$

$$CD = CR\ x\ \frac{CR}{CD} = \left(y + \frac{bx}{z}\right)\frac{c}{z} = \frac{yc}{z} = \frac{bcx}{z^2} \quad \text{(Utiliza la proporción } \frac{EB}{CD} = \frac{z}{c} \text{ donde } BS = \frac{c}{z}\ x\ EB\text{)}$$

La línea EB se puede expresar como: Siendo ***EA = k, AB = x***

$$EB = EA + AB = k + x$$

$$BS = EB \; x \; \frac{d}{z} = \frac{(k+x)}{z}\, d = \frac{dk + dx}{z} \quad \text{(Utiliza la proporción } \frac{EB}{BS} = \frac{z}{d} \text{ donde } BS = \frac{c}{z}\; x \; EB)$$

La línea ***CS*** se expresa en términos de los segmentos anteriormente hallados:

$$CS = CB + BS = y + \frac{dk + dx}{z} = \frac{zy + dk + dx}{z}$$

$$CF = CS \; x \; \frac{e}{z} = \left(\frac{zy + dk + dx}{z}\right) \frac{e}{z} = \frac{ezy + dek + dex}{z^2} \quad \text{(Utiliza la proporción } \frac{CS}{CF} = \frac{z}{d} \text{ donde } CF = \frac{d}{z}\; x \; CS)$$

$$G = AG - AB = l - x$$

$$BT = BG \; x \; \frac{f}{z} = (l - x)\frac{f}{z} = \frac{fl - fx}{z}$$

$$CT = BC + BT = y + \frac{fl - fx}{z} = \frac{zy + fl - fx}{z}$$

$$CH = CT \; x \; \frac{g}{z} = \frac{gzy + fgl - fgx}{z}$$

A partir de la introducción de una nueva representación y expresión de ecuaciones algebraicas en función de segmentos, comienza a verse un cambio cualitativo en la manera de ver las curvas, no solamente como una situación geométrica particular, sino como una expresión analítica, que permite conocer propiedades de la curva tomando como referencia un sistema de coordenadas determinado. Es en este momento que el objeto "curva" comienza a trascender hacia los elementos algebraicos denominados "ecuaciones".

Precisamente las líneas de causalidad teórica presentes en Descartes que permitieron abordar el problema de Pappus y dar solución al mismo, se engendran en la manera de solucionarlo y con más fuerza en la manera de tomar curvas (secciones cónicas) y amarrarles una ecuación algebraica que denotara su representación, más aún, cuando no solamente la manera de hallar ecuaciones se limita a resolver el problema de Pappus sino a la creación de un "instrumento" generalizado que da cuenta de muchas otras curvas diferentes a las secciones cónicas , es decir que posean un grado mayor que una ecuación de segundo grado.

Indudablemente con las diferentes relaciones que se presentan en la cadena de igualdades presentadas por Descartes y los nuevos segmentos que aparecen en términos de x e y, se muestra una dependencia entre las magnitudes inicialmente dadas, sin embargo, con la eminente solución del problema de Pappus y el evidente proceso de algebrización de las magnitudes cabe preguntarse, si ¿Descartes es consciente de que la solución del problema implica la generación de las secciones cónicas?

La solución del problema se hace tangible en el sentido de que Descartes encuentra las longitudes ***CH, CT, CF, CS*** como las líneas que pasan por ***C***.

Estas líneas cumplen la condición de Pappus, que se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CH}{CF}$$

Con la propiedad de cerradura definida anteriormente para la multiplicación y división de segmentos tenemos la condición del problema de Pappus

$$CB \times CF = CH \times CD$$

Sustituyendo los valores encontrados para cada segmento con la notación dada por Descartes obtenemos la siguiente expresión,

$$y \times \frac{ezy + dek + dex}{z^2} = \frac{gzy + fgl + fgx}{z^2} \times \left(\frac{yc}{z} + \frac{bcx}{z^2}\right)$$

Organizando términos y agrupando los semejantes se obtiene la siguiente expresión:

$$(-cgz^2 + ez^3)\, y^2 + (bcfg)\, x^2 + (bcgz - cfgz - dez^2 - dez^2)\, xy$$
$$+ (-cfglz + dekz^2)\, y + (-bcfgl)\, x = 0$$

> Descartes sabe que todos los puntos de una cónica se pueden construir por regla y compás. Cuando la curva geométrica es una cúbica o tiene grado cuatro se construyen punto a punto por la intersección de dos cónicas. Las de quinto o sexto grado son construibles mediante la intersección de su “parábola de segundo grado” con el círculo, y así sucesivamente. Esto le permite a Descartes generar una jerarquía de curvas reagrupando los grados por pares o géneros : las curvas geométricas de grado 2 – 1 2 se construyen por la intersección de un círculo y una curva de grado . (Arboleda, 2012, p. 4).

Si tomamos

$\boldsymbol{A = -cgz^2 + ez^3,}$
$\boldsymbol{B = bcfg,}$
$\boldsymbol{C = bcgz - cfgz - dez^2 - dez^2,}$
$\boldsymbol{D = -cfglz + dekz^2,}$
$\boldsymbol{E = bcfgl}$

La ecuación anterior adquiere la forma $\boldsymbol{Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0}$ a partir de esta ecuación se presentan tres consideraciones para los posibles valores que toma las cantidades constantes:

- Es una parábola si ***A*** ó ***C*** es cero.
- Es una elipse si ***A*** y ***C*** tienen el mismo signo (si ***A***= ***C*** corresponde a un círculo).
- Es una hipérbola ***A*** y ***C*** tienen signos opuestos.

Sin duda los valores desconocidos corresponderían a ***x*** e ***y***. Una de las pretensiones de Descartes es conocer la forma de la cónica generada por la ecuación anterior, para ello realiza ciertas consideraciones sistemáticas a la hora de identificar la cónica. Entre estas consideraciones se encuentra la de mantener fijo un valor de ***y***, a partir de este conocer los de ***x*** modernamente esto correspondería al proceso de tabular.

Para ver mejor este proceso tomemos un caso particular suponiendo que
$\boldsymbol{EA = 3;\ AG = 5;\ AB = BR;\ BS = \frac{BE}{2};\ GB = BT;\ CD = CR,\ CF = 2CS;\ CH = \frac{2CS}{3};\ CH = \frac{2CT}{3};\ <ABR = 60^\circ}$

operando bajo las condiciones dadas obtenemos la siguiente ecuación $\boldsymbol{y^2=2y-xy+5x-x^2}$ que corresponde a un círculo.

Tabulemos algunos valores para la ecuación anterior e identifiquemos que la ecuación anterior efectivamente corresponde a un círculo, suponiendo que la cantidad conocida es ***y***, y la que se desea hallar (la desconocida) es ***x***.

y	***x***
0	$\boldsymbol{x_1=0.}$ $\boldsymbol{x_2=5}$
1	
-1	
2	

Para el primer valor $\boldsymbol{y=0}$**,** se obtiene $0=5x-x^2$, con lo que la nueva expresión corresponde a una ecuación de segundo grado, la solución de esta ecuación y en general las ecuaciones de la forma $\boldsymbol{x^2=\pm\ ax \pm b^2}$ Descartes las resuelve mediante un proceso que describe en la (Descartes R. , 1637, pág. 394), de esta forma es posible reducir la ecuación $\boldsymbol{y^2 = 2y - xy + 5x - x^2}$ para valores de $\boldsymbol{y}$ dados, a una ecuación de segundo grado. Finalmente al realizar el mismo procedimiento para el resto de valores de y, se obtiene la siguiente tabla.

Y	*X*
0	$x_1=0 \quad x_2=5$
1	$x_3=2\ \sqrt{5}x_4\ =2+\sqrt{5}$
-1	$x_5=3\ \sqrt{6}x_6\ =3-\sqrt{6}$
2	$x_7=0 \quad x_8\ =3$

Tabla 3.
Tabulación de algunos valores.

Al graficar los puntos en el sistema referencial ***X***- ***Y*** oblicuo se obtiene la siguiente figura.

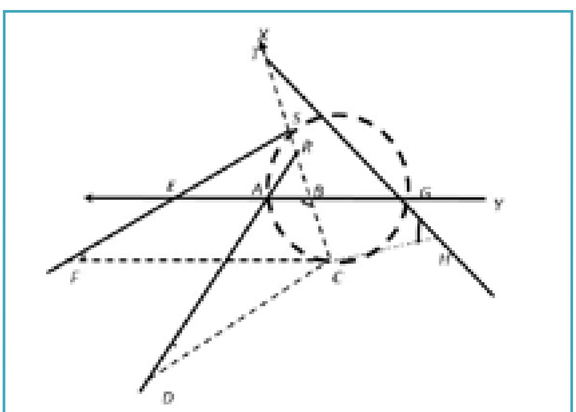


Figura 5
El círculo.

Las parejas obtenidas de la forma (***x,y***) generan punto a punto el círculo, donde el origen (***0,0***) corresponde al punto ***A***, el punto (0,5) coincide aproximadamente en el punto ***S***, hasta generar el círculo.

Hasta este momento lo novedoso del procedimiento implementado por Descartes es la introducción de una notación para los segmentos y la manera de generar ecuaciones para la situación geométrica de las cuatro líneas, pero la potencia de su técnica se fundamenta en la manera como Descartes interrelaciona segmentos conocidos, con desconocidos.

Claro está que Descartes ha encontrado que las cuatro líneas ***CH, CD, CF*** y ***CD*** se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)\,y - (dez^2 + cfgz - bcgz)\,xy + (bcfgl)x - (bcfg)\,x^2}{(-\,cgz^2 + ez^3)}$$

$$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$$

Lo interesante del problema de Pappus es preguntarse por el lugar geométrico generado cuando las cuatro rectas ó más de estas son paralelas ó son dos perpendiculares a las otras dos ó tres paralelas y una perpendicular a estas, etc.

OTRAS MANERAS DE GENERAR CURVAS: "EL COMPÁS GENERALIZADO"

Uno de los supuestos más importantes dados por Descartes es la clasificación de las curvas por géneros y la introducción de la herramienta "compás generalizado", que sin duda permite conocer la ecuación algebraica asociada a una gran cantidad de curvas.

Descartes acoge con su método a cierto tipo de curvas, llamadas geométricas y excluye las denominadas curvas mecánicas puesto que, como él menciona, son concebidas como el resultado de dos movimientos independientes cuya relación no admite una determinación exacta (Descartes, 1637, p.44). En esta exclusión de curvas se encuentra la cuadratriz, la espiral de Arquímedes, las curvas logarítmicas y catenarias, que años más tarde se llamarán *curvas transcendentes*.

Las curvas geométricas consideradas por Descartes representan la esencia de la geometría, en ellas reposa la base de su método. Entre estas se destacan la concoide y la cisoide.

Cabe preguntarse ¿cómo Descartes encuentra la ecuación de la hipérbola, elipse y parábola? Para ello define las curvas de primera clase entre ellas el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse, a partir de esta definición extiende la de segunda clase, que corresponderán a las curvas que posean tercera o cuarta dimensión como la concoide, y el tercer tipo las de cuarto y quinto grado. Algo que enmarca esta idea es que Descartes encuentra la ecuación de la hipérbola aplicando su método para una situación geométrica en particular, para ello considera un instrumento donde supone una línea desconocida y que quiere saber a qué clase pertenece. Descartes supone un instrumento como se muestra en la (Figura 6), a partir de esto identifica los segmentos desconocidos y conocidos y trata de relacionarlos entre sí.

Supongamos que la línea ***EC*** es la buscada; pero en este momento nos hemos encontrado con una conexión que es la forma de construirla la línea ***EC***; se realiza en términos mecánicos, en el sentido de la cuadratriz de Hipias, la razón de esto se sustenta ya que la línea ***EC*** es el resultado de la intersección de la recta ***GL*** y del plano rectilíneo ***CNKL.***

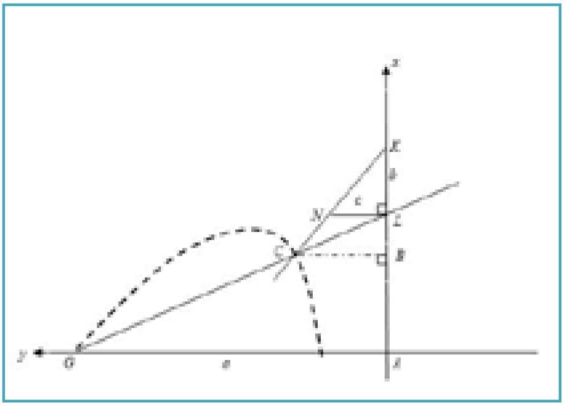


Figura 6:
Compás generalizado para hallar la ecuación de la hipérbola.

Descartes conoce que una curva, como la elipse, cumple determinada condición geométrica proporcionada por Apolonio (es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias que separan a un punto del conjunto de dos puntos dados, llamados focos, es una constante dada, mayor que la distancia entre los focos) (Roshdi 2008 p-6) para el caso de la elipse considera unos supuestos similares a los usados para dar respuesta al problema de Pappus, entre éstos considera las razones y proporciones dadas según la geometría del problema y la asignación de segmentos mediante una cantidad literal.

La manera como Descartes encuentra la ecuación de una hipérbole se colige el uso de un sistema de coordenadas, donde precisamente relaciona las cantidades desconocidas y conocidas ***x, y,*** vistas como segmentos que varían y generan la curva deseada.

Para encontrar a qué género pertenece la curva buscada, asigna los segmentos conocidos y desconocidos mediante una expresión literal tales como ***a, b, c, x, y***. Esto se realiza con el objetivo de encontrar una expresión que me relacione los segmentos y sus respectivas magnitudes. En nuestro caso tenemos:

$$GA = a,\ KL = b,\ y\ NL = c,\ BA = x,\ CB = y,$$

Respectivamente, luego por la geometría de la construcción, los triángulos ***KLN*** y ***KDC*** son semejantes, tenemos que:

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$$

Luego $\boldsymbol{BK = \frac{h}{c}y.}$

El segmento $\boldsymbol{BL = BK - KL = \frac{b}{c}\,y - b.}$

Luego el segmento $\boldsymbol{AL = x + BL = x + \frac{b}{c}y - b.}$

Por otra parte los triángulos ***LBC*** y ***LAG*** son semejantes, permitiendo establecer la siguiente proporción:

$$\boldsymbol{\frac{BC}{BL} = \frac{AG}{AL}}$$

que bajo la operación de la multiplicación de segmentos definida se traduce en

$$\boldsymbol{BC \; x \; AL = BL \; x \; AG,}$$

De esta manera sustituyendo las expresiones encontradas se obtiene que

$$\boldsymbol{y\left(x+\frac{b}{c}y - b\right) = \left(\frac{b}{c}y - b\right)a,}$$

Trasponiendo y agrupando términos,

$$\boldsymbol{y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ya - ac.}$$

Descartes conoce la ecuación de la elipse, mas no describe la manera de encontrarla, mediante su método.

Las curvas mecánicas para Descartes, como la espiral, la cuadratriz, las curvas logarítmicas y catenarias, las toma fuera de la geometría ya que representaron un problema puesto que él no tenía una herramienta que permitiera asociarles una ecuación algebraica. Sin embargo en el siglo XVII-XVIII este problema comienza a esclarecerse con la aparición de unos objetos denominados series de potencias. La salida a este problema es visualizada en Newton y Leibniz quienes logran establecer una serie de reglas y lineamientos. En este sentido compartimos la idea de (Guicciardini, 2003, p. 76) *"antes de la aparición de las series infinitas la curvas transcendentes no tenían una representación analítica, se presentaban en términos geométricos".*

Conclusiones

Como un primer momento y como se muestra al inicio de este artículo el paso de lo sintético (curva) a lo analítico (ecuación), se encuentra constituido en dos momentos cruciales:

- 1. El descubrimiento y tratamiento dado a las secciones cónicas.
- 2. La introducción y representación de ecuaciones algebraicas asociadas a las curvas geométricas.

Estos dos momentos nos permiten decir que los procesos evidenciados e intermedios, que se presentan en el paso de la curva a la ecuación, los entes geométricos (secciones cónicas, rectas, circulo, curvas) se conciben como un elemento inicial en la constitución de las matemáticas y, más aún, provenientes de la antigüedad griega. En este sentido el tránsito de lo sintético relacionado con la manera de producir curvas se ve inducido con la introducción de las ecuaciones algebraicas por Descartes y sus contemporáneos. Precisamente en esta identificación las curvas geométricas y mecánicas aparecen caracterizadas tal como lo hace Descartes. Una de los aportes más relevantes encontrados en la obra de Descartes es el cambio cualitativo que se presenta al crear un método para asociar ecuaciones a las curvas. Justamente el paso de una representación visual a una representación analítica expresada mediante una ecuación es el que permite la introducción de un sistema de coordenadas, donde sus elementos constitutivos comienzan a permear la idea de variación bien sea entre segmentos, puntos o curvas.

Tal como se mostró en el desarrollo histórico de este trabajo, el punto central de la solución del problema de Pappus es la caracterización de las secciones cónicas, que con respecto a la caracterización de Menecmo y Apolonio sufren un cambio referente al desprendimiento de una situación netamente geométrica (secciones de un cono) a ser vistas como curvas que poseen una representación analítica. Justamente Descartes al establecer un conjunto de operaciones definidas para los segmentos permiten establecer la dualidad numero-magnitud, con lo cual está introduciendo un cuerpo numérico, que le permite operar segmentos y definirlos como una operación bien establecida. La constitución de una teoría de ecuaciones algebraicas proveniente de los trabajos de Descartes, se constituye en un elemento fundamental en el desarrollo de la idea de función.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides. En C. Á., & R. Martinez, *Descartes y la ciencia del siglo XVII* (págs. 15-69). México D.F, México: Siglo ventiuno editores.

Arboleda, L. C. (2012). *El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas.* Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Descartes, R. (1637). *La Géometrié.* (D. E. Smith, & M. L. Lathan, Trans.) The open court publishing company.

Guicciardini, N. (2003). *Newton's Method and Leibniz's Calculus.* En H. N. Jahnke, A History of Analysis (págs. 73-103). Rhode Island: American Mathematical Society.

R. R. (2008). *Apollonius de Perge*, Coniques Tome 1.1: Livre I. Berlin, Germany: DeutschenNationalbibliothek.

Recalde, L. C. (2013). *Lecciones de Historia.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

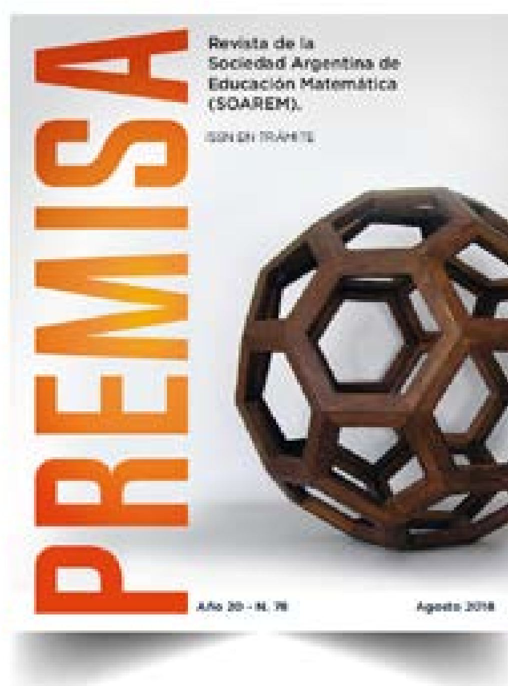
Sefrin-Weis, H. (2010). *Pappus of Alexandria: Book 4 of the collection.* (J. Z. Buchwald, Ed., & H. Sefrin-Weis, Trans.) New York, USA: Springer-Verlag.

PREMISA

INSTRUCCIONES PARA LA PUBLICACIÓN DE ARTÍCULOS

La Revista Premisa es la revista oficial de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM). Esta revista es publicada trimestralmente en los meses de febrero, mayo, agosto y noviembre. Uno de sus fines es brindar un espacio de intercambio y enriquecimiento a profesores, investigadores, formadores de docentes y estudiantes, por medio de la divulgación de trabajos de investigación y desarrollo en el campo de la educación matemática. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones empíricas o teóricas, estudios de casos, revisiones de la literatura en áreas específicas de investigación o propuestas didácticas, en formato de artículo de matemática educativa. Las temáticas que abordan los artículos pueden ser: problemáticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática de los distintos niveles de enseñanza, resultados de investigaciones en la matemática educativa, análisis de experiencias de aula, análisis de textos de estudio en vigencia, análisis críticos de estados del arte actualizados de alguna problemática didáctica o propuestas de modelos metodológicos sustentados en antecedentes teóricos y empíricos. Cualquier otro tipo de contribuciones serán sometidas a la consideración del editor.

Los artículos deben tener una extensión máxima de 12 páginas a espacio simple en hoja tamaño carta letra Times New Roman tamaño12. Las normas para las citas y referencias se deben realizar en formato American Association of Psychology (APA). La primera página debe contener el nombre de los autores, su afiliación profesional, así como su dirección electrónica, un resumen de una extensión máxima de cien palabras, abstract, palabras clave (hasta 5) y keywords, en Word para Windows. Los gráficos e ilustraciones deben ser dibujados con precisión; deben insertarse en el artículo donde corresponda, pero también ser enviados en archivos aparte como jpgs o eps o tiff, con la mayor resolución posible, cada uno por separado. Los artículos deberán estar escritos en castellano.



Toda contribución propuesta será sometida a arbitraje de por lo menos dos evaluadores, notificándose a los autores sobre el status de la misma.

El resultado del dictamen puede ser:

- 1. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
- 2. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
- 3. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
- 4. Sugerencia de rechazo del artículo.

Los trabajos deben ser originales y sin compromiso de ser editados por otra publicación. Las opiniones expresadas por los autores en sus contribuciones son de su única responsabilidad. Estas no representan la opinión de la SOAREM.

El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación. El Comité Editorial queda autorizado por los autores para la publicación y difusión de los artículos enviados y publicados en Premisas, a través de la página web de SOAREM. En caso de ser publicado el trabajo, los autores recibirán un certificado digitalizado de publicación en el que se indica el link en el que se encuentra el artículo. No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en Premisa.

Los trabajos serán enviados a: revista.premisa@gmail.com

SOAREM

soarem1@gmail.com

www.soarem.org.ar

Personería Jurídica - Resolución Nº 000530 (31 de mayo 1999)
CUIT: 30-70309122-5