

UN INSTRUMENTO PARA LA EXPLICITACIÓN DE TENDENCIAS DE PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO

Amable Moreno, José María Cardeñoso
UTN, Facultad Regional Mendoza, Argentina.
UCA, Universidad de Cádiz, España.
amable.moreno@frm.utn.edu.ar - josemaria.cardenoso@uca.edu.es

RESUMEN

En este trabajo presentamos un instrumento para la determinación de las tendencias de pensamiento probabilístico. Para la elaboración del mismo se consideraron dos dimensiones: la aleatoriedad y la probabilidad, con aplicaciones en el contexto lúdico, cotidiano y físico-natural. La validación del mismo se realizó mediante la determinación de medidas psicométricas, como el índice de dificultad y el índice de discriminación. La aplicación del mismo en 583 estudiantes del Profesorado de Matemática y 325 estudiantes del Profesorado de Biología de la provincia de Mendoza nos permitió encontrar, en ambos casos, cuatro tendencias de pensamiento probabilístico.

PALABRAS CLAVE: Cuestionario. Concepciones probabilísticas. Tendencias de pensamiento.

INTRODUCCIÓN

La aleatoriedad y la probabilidad son dos ideas importantes, como lo ha indicado Iddo Gal (2005), en un programa de formación probabilística. Si nuestro interés es lograr la alfabetización probabilística de una sociedad, se debe partir de una preparación competente de los futuros profesores de secundaria, en esta temática. Sin embargo, sabemos que para muchos estudiantes estos conceptos son difíciles de comprender (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014a, 2014b y 2014c). Para mejorar la comprensión de los mismos, se debe abordar esta problemática, a partir de un proceso que comience con la indagación de las ideas de los estudiantes; para luego implementar acciones docentes, mediante estrategias didácticas apropiadas, que les permitan adquirir concepciones formales que involucren los aspectos epistemológicos, históricos y didácticos de la aleatoriedad y la probabilidad.

Por lo indicado, hemos partido del cuestionario sobre concepciones probabilísticas, que fue diseñado y estabilizado por Cardeñoso (2001), sobre el cual realizamos algunas modificaciones para adaptarlo a nuestro contexto social, cultural y físico.

ELABORACIÓN DEL CUESTIONARIO

En la construcción de nuestro cuestionario se tuvieron en cuenta dos dimensiones que definen el constructo de interés “*razonamiento aleatorio- probabilístico*”. Estas dos dimensiones son: “el reconocimiento de la aleatoriedad” y “la estimación de la probabilidad”. Las argumentaciones que dan los estudiantes en el reconocimiento de la aleatoriedad, se corresponden con las categorías: Causalidad, Multiplicidad, Incertidumbre y Subjetividad. Mientras que las argumentaciones correspondientes a la estimación de la probabilidad, se basan en cinco categorías: Contingencia, Laplaciana, Frecuencial, Equiprobabilidad y Experiencial.

Cuando la relación entre los indicadores empíricos, o sea las respuestas y las concepciones subyacentes de los estudiantes que responden el cuestionario es fuerte, el análisis de los indicadores nos permite hacer inferencias acertadas. Como las respuestas de los estudiantes pueden variar dependiendo de muchos factores, como es el cansancio, la atención u otros factores, debemos reconocer un carácter aleatorio en las mismas. Por lo tanto, las respuestas de los estudiantes a las preguntas planteadas nos brindan una estimación de sus creencias y concepciones, que definen una estructura de pensamiento probabilístico, que se presenta en cada uno de ellos con un nivel de complejidad diferente, que oscila entre un pensamiento probabilístico ingenuo hasta un pensamiento probabilístico complejo. La cantidad de niveles diferentes que se presentan entre los dos extremos pueden variar dependiendo de las características sociales, culturales e idiosincrásicas de los estudiantes.

DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO

En las situaciones que a continuación se describen, expresa tu opinión en la opción abierta o señala con una (X) la opción que refleja totalmente esa opinión.

1) Encontrarme por la calle con el primer Maestro/a que tuve en la Escuela, es un suceso...

Aleatorio

No aleatorio

- porque tienen que coincidir muchas cosas, el camino que elija, la hora a la que salga.
- porque es inesperado y no lo puedes prever.
- porque me puedo encontrar con muchas personas, entre las cuales está él/ella.
- porque según mi opinión

2) Sufrir un accidente es un fenómeno...

Aleatorio

No aleatorio

- porque no puedo evitar su ocurrencia.
- porque hay muchos tipos de cosas que pueden suceder y no sabes cuál va a ocurrir.
- porque puedo tener un accidente de forma imprevista o no tenerlo.
- porque según mi opinión
-

3) La confianza que tengo en que corra viento mañana en mi localidad, es...

Baja

Media

Alta

- porque el tiempo está loco, hay tantas posibilidades de que corra viento como de que no.
- porque he visto los partes meteorológicos y todos dan un porcentaje semejante de posibilidades para que ocurra.
- porque en primavera hay más días con viento que días en calma.
- porque en primavera la proporción de días que corre viento por mes así lo indica.
- porque según mi opinión
-

4) La confianza que tengo en que, en un edificio de seis vecinos, en el primer intento consiga pulsar el timbre del portero automático que corresponde a la puerta de un amigo, sin saber dónde vive, es...

Baja

Media

Alta

- porque puede salir cada uno de los vecinos con un sexto de probabilidad.
- porque puede que sea el piso esperado puede que no, con la misma probabilidad de acertar.
- porque la posibilidad de conseguirlo es de uno a favor y cinco en contra.
- porque lo usual es que en esas circunstancias no lo consiga en el primer intento.
- porque
-

5) Que nieve en el cerro Arco dentro de 30 días es un suceso...

Aleatorio

No aleatorio

- porque se puede predecir si ocurrirá o no dentro de treinta días.
- porque nevará o no, según las condiciones del tiempo que se den ese día.
- porque ese día puede nevar, llover, granizar,... y ese es un fenómeno de los que pueden ocurrir.
- porque según mi opinión

6) La confianza que tengo en sacar una bola roja de una urna que contiene 5 bolas blancas, 5 rojas y 1 azul, es...

Baja

Media

Alta

- porque el rojo tiene las mismas posibilidades de salir que cualquier color.
- porque si se repite muchas veces la misma situación, lo esperado es que así ocurra.
- porque hay cinco bolas favorables y seis desfavorables en la urna.
- porque tengo 5 contra 11 posibilidades a favor de sacar una bola roja.
- porque

7) La confianza que tengo en conseguir las horas cátedra de 8° 1° de la Escuela Secundaria de mi barrio cuando me reciba, es...

Baja

Media

Alta

- porque es lo esperado comparando mis posibilidades a favor y en contra de conseguirlo.
- porque analizando los ofrecimientos de horas cátedra en esa escuela, se presentan alrededor de 10 profesores por ofrecimiento con un puntaje similar al que tendré cuando me reciba.
- porque tengo las mismas posibilidades de conseguirlas como de no conseguirlas.
- porque lo más normal es que así ocurra cuando me reciba.
- porque

8) Obtener el número 23 en la ruleta de 36 números es un suceso...

Aleatorio

No aleatorio

- porque de forma imprevisible cualquiera de los números puede salir o no salir.
- porque hay 36 números diferentes en los que puede caer la bola al pararse la ruleta.
- porque no se puede controlar de ninguna forma el número que resulta.
- porque según mi opinión

9) La confianza que tengo en que amanezca un día frío el 14 de Octubre, es...

Baja

Media

Alta

- porque en Octubre hay menos días fríos que templados.
- porque es igualmente posible que haga frío o que no lo haga.
- porque en esa fecha es natural que ocurra con esa frecuencia.
- porque según los partes meteorológicos alrededor de dos días por semana amanece frío en Octubre.
- porque

10) Acertar el número que muestra un dado ya lanzado, pero que no puedo ver es un suceso...

Aleatorio

No aleatorio

- porque puedo acertar o no acertar, no lo puedes prever.
- porque acertar entre tantos números posibles es muy difícil.
- porque no puedo controlar la posición del dado al caer.
- porque según mi opinión

11) La confianza que tengo en que se produzca un deterioro del medio ambiente de mi localidad, el próximo año, es...

Baja

Media

Alta

- porque depende del número de personas concienciadas frente al de las insensibles al problema.
- porque estudiando las encuestas, dos de cada siete habitantes se declaran ecologistas.

- porque puede ocurrir cualquier cosa, con las mismas posibilidades que para no ocurrir.
- porque sobre la base de lo ocurrido históricamente, el porcentaje de posibilidades así lo indica.
- porque

12) Predecir la próxima idea que me venga a la cabeza es un suceso...

Aleatorio

No aleatorio

- porque depende de lo que ocurre, de las relaciones entre las ideas, de lo que me preocupe, de lo que haya pensado anteriormente.
- porque yo no puedo saber qué se me va a ocurrir dentro de un rato.
- porque a la mente vienen muchas ideas en las que tú ni siquiera estás pensando.
- porque según mi opinión

13) La confianza que tengo en que me toque algún regalo en una rifa, en la que participo con alguno de los 10.000 números vendidos para el viaje de estudios del colegio, es...

Baja

Media

Alta

- porque tengo muchos más números en contra que a favor de que me toque un premio.
- porque así lo indica la proporción entre los números que compré con relación al total de los vendidos.
- porque siempre puede tocar o no tocarme, siempre tengo un 50% de las posibilidades.
- porque nunca me ha tocado nada, ni a ninguna persona que conozca, en todos los sorteos en los que he participado.
- porque

14) Creo que germine una semilla plantada es un fenómeno...

Aleatorio

No aleatorio

- porque a la semilla le pueden ocurrir muchas otras cosas: que se hiele, se la coman, se seque,... o que germine.
- porque tiene que coincidir una serie de condiciones ambientales favorables a la germinación: atmosféricas, de la tierra, de las semillas....

- porque puede que germine aunque también puede que no germine, no se puede saber.
- porque según mi opinión

15) La confianza que tengo en que el próximo sismo que ocurra en Mendoza, sea un sismo destructivo es...

- Baja
 Media
 Alta

- porque es igualmente posible que un sismo sea destructivo o que no lo sea.
- porque las estadísticas indican que esa es la frecuencia con que se produce un sismo destructivo.
- porque comparo las intensidades de los sismos que determinan que sea destructivo o no.
- porque según la información de la estación sismológica por cada 10.000 sismos, 155 son destructivos.
- porque según mi opinión

16) Predecir la cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda es un suceso...

- Aleatorio
 No aleatorio

- porque puede caer cara o cruz cada vez que se lance, no puedes saber cuántas saldrán.
- porque el número de caras que se obtienen en los 100 lanzamientos puede variar cada vez que lo repetamos
- porque, para que salga una u otra cara, en cada lanzamiento depende de la posición inicial, de la fuerza con que la tires, del ángulo con que caiga,...
- porque

17) Predecir el color de una bola que se extrae de una urna con bolas de distintos colores es un fenómeno...

- Aleatorio
 No aleatorio

- porque no puedes saber qué color va a salir, es algo imprevisible.
- porque el color de la bola que se obtiene puede variar cada vez que lo hagamos.

- porque depende de múltiples factores que salga una u otra bola y no puedes controlarlos.
- porque según mi opinión

18) La confianza que tengo en que me encuentre con un atasco, un sábado antes de Navidad, al ir al centro de la ciudad, es...

Baja

Media

Alta

- porque es lo que suele ocurrir normalmente esos días.
- porque vaya por donde vaya tengo las mismas posibilidades de encontrármelo.
- porque la relación entre calles atascadas y libres, para llegar a esa zona, así lo indica.
- porque la proporción de vehículos en relación con el espacio de las calles así lo indica.
- porque

19) En una mesa de juego se dispone de una caja de fichas, contiene 29 fichas negras y 16 amarillas. La confianza que tengo en que salga una ficha negra, a lo largo de toda una tarde de juego, es...

Baja

Media

Alta

- porque todas las fichas tienen las mismas posibilidades, en cualquier extracción puede salir tanto una ficha amarilla como una negra.
- porque en esta caja hay más fichas negras y puede salir más fácilmente este color.
- porque hay una proporción de 29 a 45 de fichas negras en la caja.
- porque si repetimos la extracción es así de frecuente que esto ocurra.
- porque

20) Contraer la gripe el mes que viene es un fenómeno...

Aleatorio

No aleatorio

- porque depende de tus defensas, de con quién te relaciones, de cómo te cuides,...
- porque en el ambiente hay muchos virus y el de la gripe es uno de los que pueden infectarte.
- porque es imprevisible si me voy a contagiar o no.
- porque según mi opinión

21) Que me guste la película que voy a ver el próximo sábado en Cinemark, es un fenómeno...

Aleatorio

No aleatorio

- porque hay muchos tipos diferentes de películas.
- puede que me guste o que no me guste.
- porque depende del tema de la película, de a quiénes sean los actores, del título de la película,,....., hay muchas cosas que influyen.
- porque según mi opinión
-

22) Sufrir un corte de digestión es un fenómeno, es un suceso...

Aleatorio

No aleatorio

- porque es producto de muchas cosas, del tipo de comida, de un cambio de temperatura, de un baño,.....
- porque después de una comida puedo sufrir muy diversos contratiempos, entre ellos un corte de digestión.
- porque es posible que ocurra pero no lo puedo saber con seguridad.
- porque según mi opinión
-

23) Durante una tarde jugamos a lanzar dos dados legales y acordamos que gana quien acierta el resultado de sumar los números obtenidos. La confianza que tengo en ganar eligiendo el 7 para toda una tarde de juego, es...

Baja

Media

Alta

- porque hay las mismas posibilidades para cualquiera de los números posibles.
- porque la experiencia indica que el 7 es el número que sale con mayor frecuencia.
- porque tengo una proporción favorable a que salga de 6 a 36.
- porque tengo 6 posibilidades a favor de que salga el 7 por 30 en contra.
- porque
-

24) La confianza que tengo en conocer una persona famosa el mes que viene, es...

Baja

Media

Alta

- porque la proporción de famosos en el entorno que me muevo así lo indica.
- porque esa es la frecuencia con que esto ocurre habitualmente.

- porque todo puede ocurrir, pues tengo las mismas posibilidades de conocerla como de no conocerla.
 - porque la comparación entre personas famosas y normales así lo sugiere.
 - porque
-

ÍNDICES DE DIFICULTAD DE LOS ÍTEMS

Queremos determinar si los ítems propuestos son asequibles al menos a la mayoría de los estudiantes, por lo que hemos calculado el índice de dificultad de cada uno de ellos.

Los ítems de la aleatoriedad que tienen una respuesta correcta y son puntuados de forma dicotómica son susceptibles de la determinación del índice de dificultad, que es la proporción de examinados que responde correctamente el ítem, p_i

$$p_i = \frac{\sum A_{ai}}{N}$$

Donde A_{ai} es el acierto en el ítem del estudiante a y N es el número de estudiantes que contestaron el ítem. Los índices de dificultad de los ítems propuestos y los intervalos de confianza que se obtuvieron utilizando la aproximación normal se muestran en la Tabla 1.

Un índice de dificultad igual a 1 indica que todos los estudiantes contestaron correctamente, mientras que un índice de dificultad igual a 0, indica que ningún estudiante contestó correctamente.

Suponiendo que la letra X representa la cantidad de estudiantes que han contestado correctamente el ítem, entonces se tiene que en forma aleatoria, X tomará valores entre 0 y 325. Por ello se asumirá que X se distribuye de manera binomial con parámetros $n=325$ y probabilidad de éxito

estimada por $\hat{p} = \frac{X}{n}$ donde cada intervalo de confianza se determina usando la aproximación

normal y utilizando la aproximación por intervalos de Agresti y Caffo (2000), resultan los extremos inferior y superior:

$$LI = \tilde{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{p}(1 - \tilde{p})}{n + 4}}$$

$$LS = \tilde{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{p}(1 - \tilde{p})}{n + 4}}$$

Se han calculado los intervalos con una confianza del 95%.

Ítem	ID	int. Conf.(ID)	Ítem	ID	Int. Conf.(ID)
7J	0,8277	(0,78253;0,86488)	2 F	0,6831	(0,63048; 0,731222)
13 J	0,8123	(0,76599; 0,85102)	23 F	0,6615	(0,60837; 0,71077)
21 J	0,8062	(0,75940; 0,84545)	15 C	0,6369	(0,58324; 0,68727)
5 C	0,7877	(0,73974; 0,82864)	24 F	0,6092	(0,55514; 0,66065)
8 C	0,7785	(0,72995; 0,82019)	20 F	0,5508	(0,49639; 0,60390)
3 J	0,7662	(0,71696; 0,80887)	14 C	0,5015	(0,44749; 0,55554)

Tabla 1 Índices de Dificultad e Intervalos de confianza del 95%

Los índices de dificultad encontrados varían desde el 0,5015 al 0,8277, lo que nos indican que tienen una dificultad moderada; siendo únicamente el ítem 14 y el ítem 20 los que tienen mayor dificultad.

VALIDEZ DISCRIMINANTE DE LOS ÍTEMS

Un parámetro importante en la selección de los ítems es un índice que permita discriminar de forma efectiva entre los estudiantes que son relativamente altos en el criterio de interés y los que son relativamente bajos. Es decir, un ítem será eficaz en la medida en que los estudiantes altos en el criterio tiendan a responderlo correctamente y los estudiantes bajos en el criterio tiendan a hacerlo incorrectamente. La fiabilidad de las puntuaciones totales se maximiza cuando todos los ítems tienen un elevado poder de discriminación con respecto a la puntuación total.

En nuestro caso aplicaremos un índice simple, que es aplicable únicamente a ítems dicotómicos, que es el llamado *índice de discriminación*. Un clásico estudio de Kelley (1939) demostró que bajo ciertas condiciones el índice de discriminación más sensible y estable puede obtenerse formando los grupos definidos por el 27% de los estudiantes que logran las mayores puntuaciones y el otro grupo formado por el 27% de los estudiantes que logran puntuaciones más bajas.

No obstante, cuando el grupo es razonablemente amplio se encuentran resultados muy similares utilizando como puntos de corte el 30% e incluso el 50% (Beuchert y Mendoza, 1979). Una vez que se han formado los grupos se calcula el índice de discriminación D como $D = p_s - p_i$. Donde p_s es la proporción de estudiantes del grupo superior que responden correctamente al ítem; y p_i es la proporción de estudiantes del grupo inferior que responde correctamente al ítem.

Ítem	ID	int. Conf.(ID)	Ítem	ID	Int. Conf.(ID)
2F	0,51923	(0,41072; 0,62773)	14 C	0,53430	(0,41729; 0,65139)
3 J	0,39010	(0,28881; 0,49140)	15 C	0,59615	(0,49119; 0,70110)
5 C	0,49862	(0,40066; 0,59659)	20 F	0,56730	(0,46076; 0,67384)
7 J	0,45054	(0,35284; 0,54825)	21 J	0,48901	(0,39102; 0,58699)
8 C	0,54670	(0,44934; 0,64406)	23 F	0,75824	(0,67488; 0,84159)
13 J	0,40796	(0,30396; 0,51197)	24 F	0,744505	(0,65586; 0,83314)

Tabla 2 Índices de discriminación e intervalos del 95% de confianza

Los intervalos de confianza del 95% muestran que existen diferencias significativas entre la proporción de estudiantes que contesta correctamente los ítems en el grupo inferior respecto de los estudiantes del grupo superior. Esto nos informa que todos los ítems discriminan de manera adecuada entre los que identifican los sucesos aleatorios de los que no lo hacen.

CONCLUSIONES

La aplicación del cuestionario presentado en este trabajo se aplicó a 325 estudiantes del Profesorado de Biología y 583 estudiantes del Profesorado de Matemática de la provincia de Mendoza. Las respuestas de los estudiantes fueron analizadas mediante técnicas estadísticas multivariantes: análisis de clusters y análisis discriminante, que nos permitieron obtener cuatro tendencias de pensamiento probabilístico en cada uno de los profesorados: Tendencia a la Incertidumbre, Tendencia a la Contingencia, Tendencia al Personalismo y Tendencia al Determinismo (Moreno, 2014; Moreno y Cardeñoso 2014a, 2014b; Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014d)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agresti, A. y Caffo, B. (2000). Simple and Effective Confidence Intervals for Proportions and Differences of Proportions Result from Adding Two Successes and Two Failures. *The American Statistician*, 54 (4), 280-288.
- Beuchert. A. K. y Mendoza. J. L. (1979). A Monte Carlo comparison of ten item discrimination indices. *Journal of Educational Measurement*, 16, 109-117.
- Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la Matemática escolar. Modelización de conceptos sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Cádiz. España.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 39-63. New York: Springer.

- Kelley, T.L. (1939). Selection of upper and lower groups for the validation of test items. *Journal of Educational Psychology*, 30, 17-24.
- Moreno, A. (2014). *Un estudio comparativo de las tendencias de pensamiento probabilístico de los profesores de biología y de matemática en formación*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada. España.
- Moreno, A. y Cardeñoso, J.M. (2014a). Overview of prospective mathematics teachers' probabilistic thinking. *ICOTS 9. 9th. International Conference on Teaching Statistics*. Flagstaff, Arizona, USA, 13-18 July 2014. "Sustainability in statistics education".
- Moreno, A. y Cardeñoso, J. M. (2014b). Alfabetización Probabilística: Un reto para los profesores de secundaria. En J. Asenjo; O. Macías y J. C. Toscano (Ed.) *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Documento 203. Buenos Aires. Argentina.
- Moreno, A., Cardeñoso, J.M. y González-García, F. (2014a). La Aleatoriedad en los Profesores de Biología y de Matemática en Formación: Análisis y Contraste de Significados. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 11(2), 198-215.
- Moreno, A.; Cardeñoso, J.M. y González-García, F. (2014b). Los significados de la aleatoriedad de los profesores de matemática y de biología en formación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 1963-1972. México: Comité Mexicano de Matemática Educativa.
- Moreno, A.; Cardeñoso, J.M. y González-García, F. (2014c). Los significados de la probabilidad de los profesores de matemática en formación: Un análisis desde la teoría de los modelos mentales. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 1320-1327. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2014d). El Pensamiento Probabilístico de los Profesores de Biología en Formación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1415-1442.