MATEMÁTICA: ¿CREATIVIDAD PURA O DESCUBRIMIENTO PERMANENTE?

Carlos F. Pesce, Exequiel Cardozo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González, Argentina.
cfpescejvg@gmail.com

RESUMEN

Se expondrá una versión no convencional para la demostración de una de las propiedades fundamentales del triángulo; de esta forma se busca que el estudiante comprenda que los teoremas no son propiedades cuyos pasos deben estudiarse "de memoria" sino que, por el contrario, surgen a partir de la búsqueda constante de caminos alternativos para construir el conocimiento matemático. A tal fin se presentará un abordaje alternativo para explicar la propiedad fundamental de los sectores angulares interiores de un triángulo en el que el alumno percibirá claramente la construcción de la demostración.

PALABRAS CLAVE: Intuición. Demostración. Geometría. Axioma. Teorema.

INTRODUCCIÓN

Durante más de veinticinco siglos, la obra matemática no se ha desarrollado de manera tan "lineal" como muchas veces se cree.

Con enfoques novedosos puede llegar a mostrarse al alumno que el camino que han recorrido los grandes matemáticos ha estado signado por la intuición, la analogía y la experimentación.

La disyuntiva entre las concepciones de creatividad, por un lado y descubrimiento, por otro, está fundada en el análisis del proceso seguido por los grandes genios matemáticos de todas las épocas en su afán por desarrollar la gran obra matemática.

El complejo y zigzagueante desarrollo de la matemática está determinado por el sujeto y la sociedad o cultura a la que pertenece.

De hecho, culturas diferentes pueden crear distintas obras matemáticas: el ejemplo más cabal es el desarrollo de las geometrías no euclidianas en el siglo XVIII a partir de la negación del quinto postulado de Euclides (siglo III A.C.).

Imre Lakatos (1922 – 1974), matemático y filósofo contemporáneo, resume en forma elegante lo expresado más arriba: "Las teorías matemáticas se presentan y justifican por medio de razonamientos lógicos impecables, conformando lo que a los ojos de todo el mundo, parece una autopista lisa y segura hacia la conclusión". (Lakatos, 1997, p.127)

Para quien comienza a estudiar matemática, el conocimiento matemático se presenta usualmente como algo acabado, que ha surgido de la mente brillante de los matemáticos de otrora, en un camino seguro sin titubeos a la hora de llegar a la verdad. Sin embargo, aunque la matemática no es una ciencia fáctica sino formal, una cierta dosis de intuición y experimentación resultan útiles en ese camino a la verdad.

La siguiente metáfora es más que elocuente para expresar la actividad del matemático: "Los platos matemáticos se sirven en una lujosa vajilla, equilibrados sin el menor defecto. Muchos cocineros los prueban una y otra vez antes de dar el visto bueno y servirlos al público. El quehacer matemático no está en el salón del restaurante sino en la cocina.*"* **(**Albertí, 2010, p.23)

Es indudable que al mundo matemático se le muestran los resultados; podría llegar a pensarse que la tarea de demostrar todas las propiedades que surgen de un sistema axiomático podría hacerla perfectamente bien una computadora con la sola aplicación de la reglas de la lógica formal. Nada más alejado de este pensamiento falaz.

Según Miguel Albertí, de los cuatro subprocesos involucrados en la faz de creación, entendida como la producción de algo nuevo, a saber: preparación (problema), incubación (inconsciente), iluminación (espontánea) y verificación (comprobación), se destaca al tercero como mentor de los logros más grandes de la mente humana. **(**Albertí, 2010, p25)

George Pólya (1887-1985), matemático húngaro, identifica cuatro pasos fundamentales para la resolución de un problema matemático:

1. Comprensión del problema.
2. Elaboración de un plan para resolverlo.
3. Llevar a cabo el plan.
4. Examinar la solución obtenida y revisar el proceso. (Pólya, 1983, p22)

Cuando se transita por una carrera docente es inevitable hacer un recorrido por la autobiografía escolar: y aparecen algunos interrogantes como los siguientes:

- ¿Por qué el/la profesor/a no me mostró este camino alternativo para llegar a tal conclusión?

- ¿Por qué el docente no me dio la posibilidad de que buscara otros caminos en lugar de darme el procedimiento ya resuelto?

- ¿Por qué el docente me dijo que un teorema era “algo” que había que estudiar de memoria para pasar al pizarrón a levantar nota?

- ¿Por qué el alumno creía que sólo los teoremas eran un tema de geometría exclusivamente?

- ¿Por qué el profesor de matemática es el más temido en la escuela media?

Estas preguntas reflejan la visión crítica que se adquiere luego de la formación específica. Seguramente las respuestas hay que buscarlas haciendo un análisis de las circunstancias histórico-políticas de un período concreto de la escuela media. Los libros de esa época también reflejaban el enfoque que le daba el profesor a su materia porque precisamente éste seguía a rajatabla esos textos.

El saber matemático escolar es entendido como algo que hay que estudiar para aprobar una asignatura (en especial, en épocas de gran sumisión en las que el profesor, sobre todo el de matemática, era percibido como alguien que sólo buscaba mostrar el poder que poseía al dominar ese saber que, en forma árida y aburrida, impartía desde el pizarrón).

Desde ya que había excepciones pero éstas eran muy escasas. La situación áulica que se daba con un sistema de evaluación sumativo y punitivo complicaba aún más la situación, apartando a algunos alumnos que no se sentían motivados desde un principio.

Hoy se dispone del recurso informático para enriquecer una clase de matemática. También puede disponerse de videos relacionados con casi todos los temas de la escuela media. Es tarea del docente promover la existencia de ese material en la red para que los alumnos puedan complementar el aprendizaje, no dejándolos que busquen por sí solos sino indicando qué materiales específicos les conviene pues la cantidad de información disponible es muy grande.

En definitiva, de la iniciativa del profesor y sólo de él, depende el uso eficiente de tales recursos para que la clase de matemática no se transforme el algo tedioso y aburrido.

Se ha clasificado de una forma muy veraz e inteligente a los individuos en “nativos e “inmigrantes digitales”. Los primeros (las nuevas generaciones) disponen del conocimiento informático para la aplicación casi natural de los diferentes programas de aplicación. El camino ya está hecho en parte y es una ventaja no desdeñable para el docente que pretende hacer uso de las aplicaciones digitales.

Los inmigrantes digitales (algunos profesores de generaciones anteriores), en cambio, son reticentes, aún en su mayoría, a usar la computadora en el aula.

El uso de la herramienta informática constituye una motivación adicional para los chicos que, de este modo, entienden que la matemática no es algo acabado que se ha quedado en el tiempo y que sólo sirve para aprobar la asignatura en cuestión.

La actividad consistente en probar o demostrar una propiedad fundamental en geometría siguiendo un camino no convencional con una dosis de intuición sin perder de vista el rigor de una demostración, resulta por demás interesante porque el alumno, desde primer año, ya puede tener un primer acercamiento a lo que representa y significa una demostración en matemática aunque no lo comprenda cabalmente.

Si bien se requiere cierta dosis de memoria para algunas demostraciones en matemática dado que el artificio al que se recurre para el desarrollo es casi imprescindible, en otros casos hay más de un camino para llegar a la verdad partiendo de las hipótesis, como en la presente propuesta.

Gilberto Vargas Vargas explica en su artículo la importancia del papel de la geometría en el aprendizaje.

> La geometría despierta en el estudiante diversas habilidades que le sirven para comprender otras áreas de las Matemáticas y le prepara mejor para entender el mundo que lo rodea; además, son muchas las aplicaciones de las Matemáticas que poseen un componente geométrico. Por esto, para los docentes de Matemáticas es necesario explorar diversas formas de obtener provecho de la riqueza que posee la geometría [...] en los cursos de geometría, se presenta al estudiante un producto final y ya terminado, lo cual no da lugar a que él tome un papel activo en el desarrollo de su conocimiento matemático; además, no propicia el fomento de la creatividad y del aprendizaje significativo en el estudiante. (Vargas Vargas, 2013, p75).

Las ideas del modelo de razonamiento y aprendizaje de la geometría ideado por los profesores e investigadores holandeses Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele pueden ser útiles para explicar y fundamentar la presente propuesta. En efecto, el matrimonio Van Hiele propuso tal modelo a fines de los años cincuenta y consiste en cuatro niveles de razonamiento que sirven de base para una buena secuenciación de contenidos y unidades didácticas. La jerarquización de esos niveles se pone de manifiesto en los cuatros grados de sofisticación en el razonamiento matemático.

> [...]según van Hiele cada nivel se caracteriza por habilidades de razonamiento específicas e importantes y un alumno no podrá avanzar de un nivel a otro sin poseer esas habilidades, ya que en un determinado nivel se explicitan y toman como objeto de estudio los conceptos, relaciones y vocabulario usados en el nivel anterior, incrementándose así la comprensión de los mismos. Además, según van Hiele, el que un alumno llegue a un nivel de razonamiento en un contenido geométrico no asegura que, frente a otro contenido nuevo para él, pueda funcionar con el mismo nivel. Es probable que tenga que recurrir a formas de razonamiento de los niveles anteriores según un orden de complejidad creciente [...] (Bressan, 2000, p.76)

Los niveles de Van Hiele son recursivos, en el sentido que cada nivel se apoya en el anterior. En otras palabras, no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin haber superado el previo.

Es notable como este sistema propuesto por el matrimonio Van Hiele (se desempeñaban ambos en el nivel medio de enseñanza) explica las diferentes formas de aprender en los diferentes niveles educativos. Los más chicos sólo son capaces de trabajar en forma visual con material concreto.

Los alumnos de los últimos cursos de la escuela primaria, aunque no pueden prescindir de los objetos físicos, ya son capaces de hacer descripciones más detalladas sin llegar a los razonamientos formales y la generalización, que sí puede alcanzarse en la parte final de la escuela media.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DEL TRIÁNGULO

A continuación se presenta uno de los primeros teoremas fundamentales de la geometría métrica: “En todo triángulo, la suma de sus sectores angulares interiores equivale a un ángulo llano”.

Sencillez y elegancia son los calificativos que caben para describir lo que representa esta demostración. Una breve referencia histórica es imprescindible y altamente recomendable para que el estudiante pueda ir despojándose de a poco de lo concreto para entrar en el terreno de la deducción.

Se aprovecha que el alumno tiene nociones sobre la historia de la civilización egipcia para explicarle que la geometría surgió ante la necesidad de indicar a los campesinos los límites de tierra disponibles para sembrar luego de la crecida del río Nilo.

Es oportuno analizar la etimología del vocablo geometría así como también la importancia de la civilización griega en el desarrollo deductivo a partir del primer tratado cuya autoría se le atribuye al gran matemático Euclides (325 a.c. - 265 a.c.) considerado como el padre de la geometría. "... la geometría, tal como la entendemos hoy, no es el arte de medir sobre el terreno [...] La geometría, en el sentido actual de la palabra, apareció el día en que se quisieron explicar, o aún prever las propiedades de las figuras..." (Pelletier, 1958, p. 69).

El primer acercamiento a esta propiedad se hace de manera puramente intuitiva recortando los ángulos de un trozo de cartulina triangular cualquiera y colocándolos de manera consecutiva para realizar la suma (se supone que el alumno ya sabe transportar y sumar ángulos con regla y compás desde la escuela primaria aunque en este caso no sea necesario porque se dispone de un material concreto como una cartulina). Seguramente el estudiante ya ha hecho esta actividad en la escuela primaria.

Al proponer este trabajo en grupos de alumnos, resulta fundamental que perciban que cada uno tiene una figura triangular diferente (no resulta pertinente hacer la distinción entre figura triangular y triángulo a esta altura del proceso de aprendizaje porque los alumnos no poseen aún el grado de abstracción necesario para comprenderlo; en efecto, un triángulo es una abstracción y es una idea que existe sólo en la mente).

También se puede trabajar con material concreto a partir de un trozo de cartulina, sin necesidad de recortar, de la siguiente manera: al hacer un doblez en forma paralela a uno de los lados de tal forma que el vértice coincida con el lado opuesto y, haciendo coincidir los otros dobleces con el mismo punto, el alumno reconoce cada uno de los ángulos interiores así como también el resultado buscado.

También se propone que cada alumno tenga como punto de partida una figura triangular de diferente tamaño excluyendo los casos particulares (triángulo equilátero, isósceles o rectángulo) aunque puede proponerse el trabajo sin hacer alusión a los mismos dejando total libertad ya se trata de una actividad de aprendizaje por descubrimiento.

En la siguiente foto se aprecia el trozo de cartulina con los tres dobleces sucesivos.

Volviendo a los niveles de Van Hiele, a esta altura de la exposición y siguiendo un orden cronológico, estamos en la transición del segundo al tercer nivel en el que se hace hincapié en el lenguaje utilizado y las demostraciones formales que, si bien pueden ser comprendidas por el alumno de manera aislada, no tienen capacidad de asimilarlo en su totalidad ya que se trata de una actividad para alumnos del primer año de la escuela secundaria.

No se alcanza el siguiente nivel puesto que el alumno no tiene la capacidad de abstracción suficiente para comprender el carácter axiomático de la geometría ni tampoco el significado de "la demostración" en matemática. Sin embargo se ha logrado que establezca una ordenación de los procesos a seguir.

El siguiente paso consiste en abordar la demostración clásica en la que se requiere el trazado de una recta paralela a uno de los lados que pase por el vértice exterior a ella. Es fundamental que el alumno conozca la relación entre los ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal, luego de realizar las comparaciones pertinentes. Esta forma de probar la propiedad fundamental también se da en los cursos de geometría métrica en los profesorados.

Este formato que siguen prácticamente todos los textos de geometría involucra claramente los niveles más altos del modelo del matrimonio Van Hiele, pues se trata de un teorema fundamental (deducción). Disponer de los axiomas y propiedades demostradas previamente (hipótesis) y hacer hincapié en ello en el desarrollo, permite que el alumno adquiera una noción elemental y básica de la rigurosidad (lo indicado por el modelo Van Hiele indica en su último nivel).

Si abordamos el camino partiendo de la construcción del propio triángulo será más natural llegar a encontrar la relación entre los ángulos interiores. Si bien puede usarse el pizarrón resultaría más conveniente realizar la exposición con un programa de presentaciones en la computadora, con el cañón electrónico para proyectar las imágenes (o bien la pizarra digital) y mostrar los pasos a seguir. Esto constituye una innovación de la clase tradicional y resulta más atractiva porque se va exponiendo cada paso en la construcción.

Los alumnos tienen un manejo holgado de las herramientas digitales que no debe ser desaprovechado en una clase de matemática (y en ninguna de las asignaturas). Los estudiantes poseen su propia netbook en nuestro país, lo cual les da la posibilidad de disponer de la presentación o, eventualmente, poder armarla sobre la base de lo podría dibujar el profesor en la pizarra. Tampoco debe desecharse la posibilidad de disponer de alguna aplicación que permita hacerlo en los teléfonos celulares de última generación con sistemas operativos compatibles. De todas formas, habría que analizar previamente si es viable hacerlo teniendo en cuenta la realidad socioeconómica de los alumnos: las condiciones de trabajo son bien diferentes en las escuelas de gestión pública en comparación con las privadas.

El formato, la tipografía, la redacción y las figuras de los nuevos textos de matemática son aspectos positivos que deben tenerse presentes si se hace una comparación con libros de más de tres décadas.

Efectivamente, el texto de las profesoras Repetto, Liskens y Fesquet, un clásico de esos años en la asignatura, sugerido y utilizado por la gran mayoría de los docentes, muestra un dibujo en el que se indican los ángulos interiores de un triángulo dispuestos de manera consecutiva e inmediatamente se procede a la demostración rigurosa. "... La observación que se ha hecho en este caso particular tiene validez general, según se demuestra en el siguiente... TEOREMA..." (Repetto, Liskens, Fesquet, 1977, p.90).

Se anuncia el teorema con mayúsculas indicando en Enunciado, la Hipótesis, la Tesis y la Demostración.

INTRODUCCIÓN A LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Aunque la secuencia expositiva muestre la ubicación de los sectores angulares se evitará dar el resultado de antemano porque se requiere que el alumno llegue a aquél naturalmente y por descubrimiento. Se puede optar, para comenzar, por alguna de las dos formas de trabajo expuestas más arriba.

Sin embargo, se prefiere la primera en este caso porque ya se han identificado los sectores angulares asignándole una letra en correspondencia con el vértice respectivo. Se busca simplicidad de notación en este primer acercamiento; es por eso que no se hace uso de las primeras letras del alfabeto griego ni la notación tradicional que incluye un punto perteneciente a uno de los lados del ángulo, el vértice y un punto que pertenezca al otro lado, en ese orden.

Los lados de un ángulo son semirrectas con un mismo origen, el vértice respectivo: esta indicación rigurosa hace necesario prolongar los lados del triángulo para visualizar las semirrectas.

Se propone la siguiente secuencia didáctica a los efectos de mostrar un camino alternativo novedoso que constituye una forma diferente e interesante de justificación. De este modo ameno y entretenido, ideal para el uso de las computadoras, se llega a probar de manera no convencional una de las propiedades fundamentales.

Se ha elegido precisamente esta demostración porque es muy rica en cuanto a conceptos que el alumno incorpora o recupera de años anteriores.

SECUENCIA DIDÁCTICA

1. Planteo del problema

A partir de una figura de análisis se identifican cada uno de los ángulos interiores designándolos con el nombre de cada vértice del triángulo. Aquí tenemos un primer acercamiento al álgebra pues se está representando con una letra la medida de un sector angular. (Fig. 1).

También se hace hincapié en que se toma como modelo un triángulo cualquiera, por ejemplo, un escaleno. Quedará para el alumno, guiado por el profesor, el análisis del triángulo isósceles y el equilátero. No resulta pertinente ahondar en detalles lo que representa una figura de análisis en geometría.

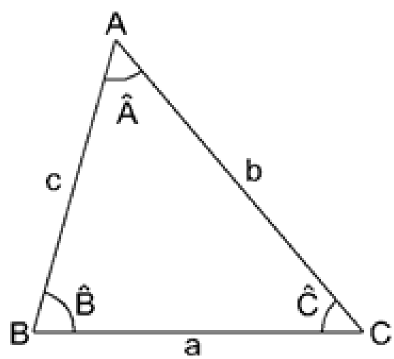

Figura 1

El primer nivel al que hace alusión el modelo de Van Hiele (visualización o reconocimiento) ya está completado por el alumno pues ya reconoce las figuras triangulares desde la primaria. Cada vez que se presenta un ente geométrico nuevo o se recupera uno ya conocido, se pasa por el primer nivel rápidamente.

2. Abordaje intuitivo

A partir de un trozo de cartulina con forma triangular, se recortan los ángulos para disponerlos en forma consecutiva y comprobar que se obtiene empíricamente un ángulo llano (según se indica en la figura 2).

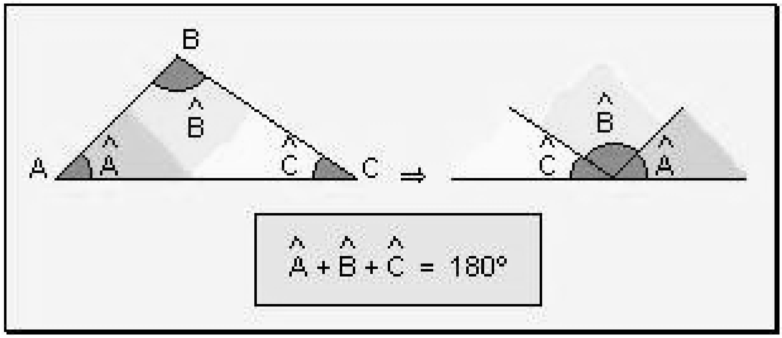

Figura 2

3. Construcción

Primer paso: se parte de un segmento que constituirá la base del triángulo, según puede verse en la figura 3.

Figura 3

Segundo paso: se traza uno de los lados a partir del vértice B y se indica el ángulo exterior correspondiente al interior con vértice en B. (Figura 4).

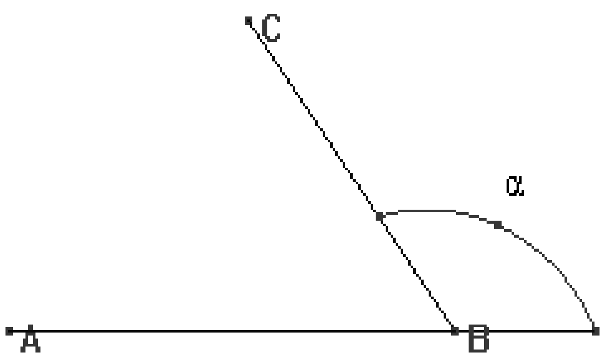

Figura 4

Tercer paso: se completa el triángulo con el tercer lado, indicando el ángulo exterior correspondiente al interior con vértice en C. (Figura 5)

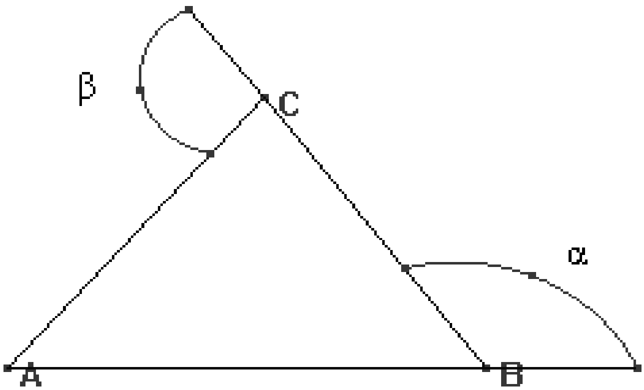

Figura 5

Cuarto paso: Se indica el ángulo exterior con vértice en A. (Figura 6)

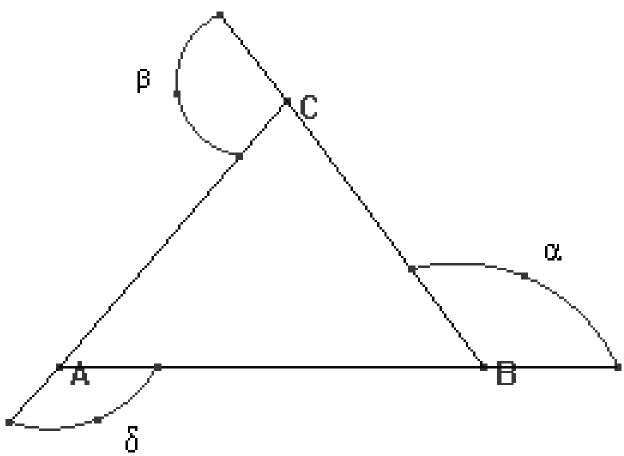

Figura 6

Ya ubicados en el segundo nivel (análisis) los alumnos se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por elementos o partes con sus propiedades. Se llega a un grado de generalización basado en la experimentación. Hay un cambio notable con respecto al primer nivel ya que el estudiante ha cambiado la forma de mirar las figuras geométricas.

Se ha desarrollado en el alumno la capacidad para reconocer que las figuras representan familias. También este tipo de razonamiento puede calificarse de matemático porque se descubren y generalizan propiedades desconocidas aunque sin perder de vista la observación y manipulación.

Quinto paso: Se comprueba que la suma de los ángulos exteriores equivale a un giro transportándolos y disponiéndolos en forma consecutiva con vértice en B. (Figura 7)

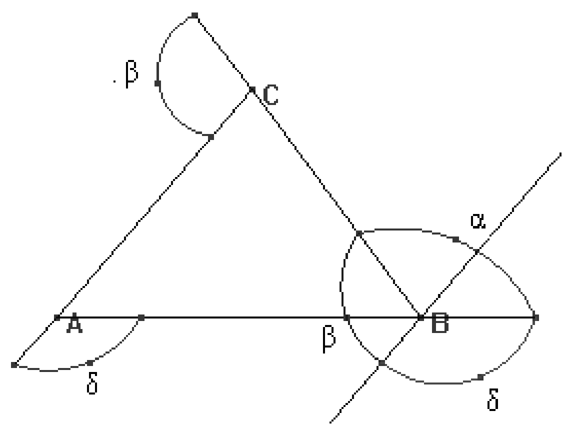

Figura 7

El tercer nivel de Van Hiele (clasificación) se caracteriza por la capacidad de razonamiento formal, no obstante, su lógica sigue apoyándose en la manipulación. Los alumnos pueden comprender los pasos sucesivos de un razonamiento aunque los perciben en forma aislada: no logran entender aún el por qué del encadenamiento ni la estructura de la demostración.

Sin embargo esta instancia resulta muy útil precisamente porque muestra el orden que debe seguirse aunque el estudiante siga las indicaciones del profesor sin cuestionarse la sucesión de pasos a seguir.

JUSTIFICACIÓN

El alumno es capaz de entender una demostración hecha por el profesor pero no puede construirla por sí mismo.

Desde otro punto de vista, no está en condiciones de comprender la estructura axiomática de la matemática. El alumno podría pensar que las demostraciones no son necesarias porque se conforman con haberlas verificado en un número grande de casos.

Esta forma de proceder apelando al descubrimiento podría llevar a una interpretación errónea si no se aclara debidamente ya que se estaría utilizando el método propio de una ciencia experimental como la física.

a. El alumno sabe que el ángulo exterior se define como el adyacente al interior, luego comprueba también que son suplementarios ya que "ve" que, al ser consecutivos, suman dos rectos.

b. Se plantean las siguientes igualdades:

$$\hat{\alpha} + \hat{B} = 180^{\circ} \quad \mathbf{(1)}$$
$$\hat{\beta} + \hat{C} = 180^{\circ} \quad \mathbf{(2)}$$
$$\delta + \hat{A} = 180^{\circ} \quad \mathbf{(3)}$$

c. Sumando miembro a miembro (1), (2) y (3):

$$\hat{\alpha} + \hat{B} + \hat{\beta} + \hat{C} + \delta + \hat{A} = 540^{\circ} \quad \mathbf{(4)}$$

d. Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa en (4) resulta:

$$(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\delta}) + (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 540^{\circ} \quad \mathbf{(5)}$$

e. La primera suma indicada en (5) equivale a 360º, entonces:

$$360^{\circ} + (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 540^{\circ} \quad \mathbf{(6)}$$

f. Trasponiendo en la igualdad (6) y operando queda la tesis:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=540^{\text{o}}-360^{\text{o}} \quad \textbf{(7)}$$
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{\text{o}} \quad \textbf{(8)}$$

El cuarto y último nivel (deducción formal) es difícilmente alcanzable en la escuela secundaria media. De lo contrario, el estudiante le encontraría un sentido a la demostración como único medio para verificar la verdad de una propiedad general así como también comprender un sistema axiomático dándole significado a las definiciones, axiomas y teoremas.

También estaría en condiciones de aceptar la existencia de demostraciones alternativas para una misma propiedad.

De hecho, a partir del trazado de la paralela a uno de los lados con la prolongación de los otros dos también se puede llegar a probar la propiedad fundamental de manera análoga mediante otro camino por comparación de otros sectores angulares.

En los niveles superiores de enseñanza de la geometría métrica se promueve la demostración de propiedades a partir de los axiomas, definiciones u otros teoremas previos sin recurrir al álgebra o la teoría de vectores geométricos.

CONCLUSIONES

Con esta propuesta de trabajo no convencional y atractiva por su sencillez, se pretende que el alumno, guiado por el profesor, se organice a los efectos de que quede dibujado el triángulo a partir de sus elementos a saber: vértices, lados, ángulos interiores y ángulos exteriores.

El docente puede aprovechar este proceso para repasar los conceptos ya estudiados, de este modo se recupera la relación entre el ángulo exterior y el interior correspondiente (son adyacentes, por lo tanto son suplementarios).

La justificación de las igualdades lleva de manera natural a la relación buscada por un camino diferente del tradicional que aparece el todos los libros de texto. El transporte de los ángulos exteriores a un vértice común y la disposición en forma consecutiva, muestra la relación entre ellos. Esta última relación es clave para llegar al resultado buscado.

Esta forma no tradicional de abordar el problema no requiere que el alumno deba conocer de antemano la relación entre los sectores angulares formados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera transversal.

Tampoco se necesita el trazado de una recta paralela a uno de los lados del triángulo, lo cual da a la demostración un aspecto no tan formal como el abordaje clásico.

Independientemente del camino seguido, esta demostración resulta muy rica en cuanto a los objetivos que se pretende alcanzar. Más allá del valioso aporte del modelo de Van Hiele que explica y justifica la secuenciación, se integran una serie de conceptos básicos muy importantes en esta etapa del aprendizaje:

- La notación en geometría.
- Uso de los elementos de geometría.
- Propiedades básicas de los sectores angulares.
- El sistema de medición de ángulos sexagesimal.
- Propiedades de los sectores angulares determinados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera.
- El uso de la letra en álgebra.
- Propiedades algebraicas elementales.
- La resolución de ecuaciones sencillas.
- El uso del lenguaje específico.

Con respecto al modelo de Van Hiele, la palabra "demostrar" tiene distintos sentidos en cada nivel. En el nivel uno, carece totalmente de sentido matemático; en el segundo, implica la comprobación en unos pocos casos.

En el tercer nivel el significado es próximo al matemático aunque los argumentos son informales ya que están basados en la observación de ejemplos concretos. Ya en el cuarto nivel, los estudiantes demuestran de manera rigurosa.

Los alumnos de los últimos años de la escuela secundaria media aún no han llegado al cuanto nivel y recurren muchas veces a la memorización para rendir los exámenes. Muchas veces, aprenden mecánicamente por repetición ciertos formalismos que el docente usa y erróneamente pide a rajatabla.

Cuando se plantea un problema diferente de los que tienen memorizados hacen el intento de resolverlo de manera análoga con los métodos conocidos y no llegan a la solución porque no son capaces de darse cuenta que esos procedimientos no les sirven. Este problema se percibe también en los ciclos superiores de enseñanza.

Otra idea que atraviesa todo el desarrollo, desde el enunciado mismo, contribuye a que el alumno entienda que en matemática no vale un ejemplo concreto para justificar propiedades generales. De hecho, cada grupo de estudiantes puede llegar a hacer su propio dibujo y contrastarlo luego con los compañeros poniendo de manifiesto que efectivamente no importan las medidas del triángulo dibujado.

Algo no menos importante para destacar lo constituye el manejo del lenguaje matemático que va adquiriendo el alumno en forma progresiva a través de la comunicación de las ideas y procedimientos. A tal fin resulta por demás interesante que se trabaje en grupos para que ellos mismos adopten ese lenguaje específico de comunicación de ideas entre sí y con el profesor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albertí, M. (2011). *La creatividad en matemáticas,* Madrid: Editec.

Bressan, A. (2000). *Razones para Enseñar la Geometría en la Educación Básica,* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático,* Madrid: Alianza Universidad.

Pelletier, J. (1958). *Etapas de la matemática,* Buenos Aires: Losada.

Pólya, G. (1983). *How to solve it: A new aspect of Mathematical Method*, Princeton: University Press.

Repetto, C., Linskens y M., Fesquet, H. (1977). *Geometría*. Buenos Aires: Kapelusz.

Vargas Vargas, G. y Gamboa Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría, *Uniciencia,* 27(1), 74-94. Recuperado de http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/issue/view/445/showToc.