RECONOCIMIENTO Y USO DEL VALOR ABSOLUTO COMO DISTANCIA. REVALORIZACIÓN DEL ERROR EN EL MANEJO DE DIFERENTES REPRESENTACIONES

Adriana Engler, Silvia Vrancken, Daniela Müller y Marcela Hecklein
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral, Argentina.
aengler@fca.unl.edu.ar - svrancke@fca.unl.edu.ar
dmuller@fca.unl.edu.ar - mhecklei@fca.unl.edu.ar

RESUMEN

Las dificultades en la interpretación del valor absoluto y su aplicación en la resolución de ecuaciones e inecuaciones sencillas intervienen en el aprendizaje del cálculo.
A fin de lograr la construcción de conocimiento en el aula universitaria, diseñamos y pusimos en escena diferentes actividades, que contemplan el manejo y la articulación entre distintas representaciones, para llevar al alumno a reconocer y usar la definición de valor absoluto como distancia. A través del estudio de las resoluciones exploramos el nivel de comprensión al trabajar dicho concepto. En este trabajo presentamos algunas actividades y un análisis de las producciones de los alumnos.

PALABRAS CLAVE: Valor absoluto. Representaciones. Errores. Dificultades.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior. El currículo de matemática y los métodos de enseñanza fueron inspirados, durante mucho tiempo, sólo por ideas que provienen de la matemática formal y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia.

Como docentes de Matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, observamos que muchas de las dificultades en el aprendizaje de los conceptos básicos del cálculo se asocian a temas que están incluidos en nuestro programa como repaso de contenidos de los últimos años de enseñanza en el nivel medio. Entre ellos, valor absoluto y su aplicación en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Farfán (2013) expresa:

> Tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki. La enseñanza tiende a sobrevalorizar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado los argumentos visuales, por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas. Es decir, la concepción que de la matemática se tenga, permea la de su enseñanza, independientemente de los estudiantes a los que se dirige. A ello se aúna el contrato didáctico establecido, que como parte de la negociación impide que el estatus del profesor sea demeritado, si éste no resuelve satisfactoriamente los problemas planteados en el curso; el recurso algorítmico permite subsanar decorosamente lo establecido en el contrato y "aligera", eliminando dificultades subyacentes al contenido matemático. (p. 25)

En nuestro trabajo cotidiano en el aula, consideramos importante y necesario revisar esta situación ya que los problemas derivados de una concepción pobre de contenidos del precálculo se agravarán a medida que se avance en el aprendizaje del cálculo.

Un estudio de las dificultades en la comprensión de los conceptos nos obliga a analizar las interpretaciones y concepciones que se generan por parte de los alumnos, especialmente aquellas que no coinciden con los significados aceptados en matemática. Con frecuencia, los alumnos interpretan lo que sus profesores consideran presentaciones excelentes de maneras distintas de lo que éstos pretenden (Confrey, 1990). También suelen inventar representaciones de contenidos que son idiosincrásicas y tienen un significado personal, pero no se parecen en nada a las representaciones matemáticas convencionales (Confrey, 1991). Estas diferencias provocan la aparición de errores. El término error se refiere específicamente a la inconsistencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado.

Asumimos las ideas de Godino, Batanero y Font (2003, p.73) cuando expresan: "Hablamos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar".

Actualmente, los estudios sobre aprendizaje de la matemática consideran la aparición de errores como parte normal del proceso de aprendizaje, siendo fundamentales en el proceso de construcción de conocimiento. Entendiendo el aprendizaje como un proceso dinámico, no definitivo, el error debe interpretarse como una etapa, un momento en dicho proceso. Sólo puede equivocarse quien trata de poner en juego ideas propias sobre saberes adquiridos o que cree haber asimilado. Morín (2000) señala que el conocimiento es lo que conlleva el riesgo de error. Así, detectar las causas de los errores constituye un primer paso para superarlos.

> El docente debe entender los errores específicos de sus alumnos como una información de las dificultades de la matemática que requieren un esfuerzo para la superación. Es importante tener en cuenta que podemos superar un error y aceptarlo no como algo que no tendría que haber aparecido sino como algo cuya aparición es útil e interesante ya que permite la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento. (Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2004, p. 31)

Teniendo en cuenta que el concepto de valor absoluto es una noción básica de la matemática y además un recurso necesario para abordar contenidos fundamentales del cálculo, como límite y continuidad, creemos importante detectar cuáles son los errores más frecuentes que cometen los alumnos cuando trabajan con actividades que involucran este concepto, analizar las causas de su aparición y generar propuestas que ayuden a superarlos.

En este sentido, resulta interesante poder llevar adelante, de manera conjunta con ellos, acciones tendientes a la corrección de los mismos como un recurso que permita la construcción de conocimiento matemático con significado.

Diversos investigadores como Cerizola, Pérez y Martínez (2003) y García (2014) coinciden en que es un concepto que ocasiona muchos problemas para su comprensión. En una investigación realizada con alumnos y profesores de ciclo básico de Ingeniería, García (2014) detectó que muchas de las dificultades, errores y obstáculos que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje del valor absoluto están relacionados con los diversos usos y significados de este concepto, en distintos contextos, como el numérico (su definición como el número sin el signo), el métrico (valor absoluto como distancia) y el analítico (como función definida por tramos). La aplicación de cuestionarios y entrevistas reveló grandes dificultades para la comprensión del concepto por los propios docentes, que en muchos casos desconocían las diversas interpretaciones.

Consideramos que estas dificultades en el manejo del concepto de valor absoluto están muy relacionadas con la manera de llevarlo al aula. En la enseñanza no se pone énfasis en tratar el concepto desde diversos puntos de vista (manejar el concepto como función, gráficamente, o como distancia, geométricamente).

Por lo general, se lo plantea como una operación que transforma el número en positivo, se enumeran propiedades y se resuelven ecuaciones e inecuaciones de una manera rutinaria y mecánica haciendo uso de las mismas. Esto se trabaja así durante mucho tiempo, recurriendo a la definición como una función por tramos recién en los últimos años de educación media.

Por otra parte, muchas de las dificultades de los alumnos pueden ser explicadas como una falta de coordinación entre registros de representación. El sistema de enseñanza actual se caracteriza por la utilización de procedimientos ligados al registro algebraico, dejando de lado los correspondientes al registro gráfico. En general, las tareas de conversión entre distintas representaciones son minimizadas y eso produce limitaciones en la visualización y en la comprensión de los conceptos.

Las representaciones son procedimientos de comunicación y a la vez, poderosas herramientas de pensamiento. El proceso de conectar distintas representaciones de un objeto matemático, profundiza en la comprensión de la matemática (Duval, 1998).

El papel que juegan las representaciones en la enseñanza tiene una importancia muy relevante. Cuando los estudiantes acceden a las representaciones matemáticas y a las ideas que representan, toman posesión de un conjunto de instrumentos que amplían de manera significativa su capacidad para pensar matemáticamente. Analizando las representaciones que hacen los estudiantes cuando resuelven problemas e investigan ideas matemáticas, los profesores pueden obtener información sobre la manera de interpretar y pensar de sus alumnos.

Teniendo en cuenta lo expresado surge este trabajo para conocer la manera en que los alumnos trabajan y pueden desenvolverse al inicio de una carrera universitaria con un contenido abordado en el nivel medio y durante el curso de articulación disciplinar realizado previo al ingreso. Se busca conocer cómo pueden transitar diferentes representaciones interpretando el significado geométrico del valor absoluto como distancia. Con la información obtenida fue posible el trabajo durante la clase en la que se desarrolló el tema así como un profundo debate entre las docentes involucradas para revalorizar y utilizar el análisis de los errores como instrumento para mejores propuestas de enseñanza.

METODOLOGÍA

Pensando en preparar a los alumnos para la comprensión de los conceptos de límite y continuidad, y teniendo en cuenta las dificultades y errores observados en trabajos corregidos de años anteriores, diseñamos e implementamos una situación de aprendizaje estructurada de manera tal que lleve al alumno a conocer y usar la definición de valor absoluto como distancia. Se organizaron actividades para favorecer el manejo y la articulación entre distintos sistemas de representación, en particular los registros verbal, gráfico, analítico y simbólico. Las mismas permitieron además, a través de diferentes estrategias metodológicas y herramientas detectar, identificar y caracterizar errores cometidos por los alumnos al transitar las diferentes ideas alrededor del concepto.

El análisis de las producciones de los alumnos nos permitió indagar sobre:

- Las nociones que manejan los alumnos sobre valor absoluto.
- Las características de su aplicación en la resolución de ecuaciones e inecuaciones sencillas.
- Los sistemas de representación que los alumnos privilegian al usar y aplicar la definición de valor absoluto.
- Los errores que cometen y las posibles causas de su aparición.

Con esta forma de trabajo se busca también la implementación en el aula de una manera estratégica de recolección de datos que permitan extraer conclusiones para mejorar nuestras prácticas docentes.

Las actividades se implementaron con alumnos inscriptos en la asignatura Matemática II y fueron resueltas en clase trabajando de a pares. Se obtuvieron cincuenta trabajos. Se corrigieron colocando: el símbolo (✓) al correcto, una cruz (x) al incorrecto, la expresión (Inc.) al incompleto y una marca horizontal (–) si no lo resolvían. Se hicieron algunas acotaciones y observaciones escritas en los casos que se consideró necesario. Los trabajos fueron devueltos la clase siguiente. Durante los primeros veinte minutos los alumnos analizaron sus producciones e intercambiaron sus trabajos con un compañero para expresar también opinión de las respuestas del otro.

Finalizada esta primera etapa, cada docente comenzó con el desarrollo de los diferentes contenidos asociados al tema valor absoluto utilizando las actividades que los alumnos habían resuelto en la clase anterior y que tenían nuevamente en sus manos con las observaciones realizadas. Para finalizar la jornada, se realizó un debate grupal sobre los errores cometidos, las dificultades surgidas, los logros obtenidos y las nuevas ideas surgidas durante las dos horas que duró el encuentro.

Es importante destacar, como se dijo que, a partir de los errores y dificultades detectadas en las correcciones y en los debates, las docentes desarrollaron los contenidos.

En términos metodológicos, entonces, la situación de aprendizaje se desarrolló en tres momentos: el diseño de las actividades a incluir (según revisión bibliográfica realizada y, desde la práctica docente, dificultades y errores observados en trabajos recogidos de años anteriores), la resolución de las actividades y la utilización de las respuestas (con sus logros, dificultades y errores) para el desarrollo de los contenidos y la puesta en común de conclusiones. Desde el equipo responsable del desarrollo de las clases, se analizaron y valoraron los resultados obtenidos a fin de favorecer la toma de decisiones en acciones futuras.

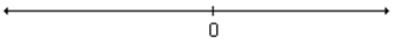
PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Presentamos los enunciados de algunas de las actividades y un análisis, fundamentalmente cualitativo de las respuestas dadas.

La primera actividad requiere que los alumnos trabajen y conviertan distintas representaciones del valor absoluto en los registros simbólico, numérico y geométrico.

Actividad

a)i) Represente en la recta los números –2 y 2.



Los puntos que los representan, ¿a qué distancia están del cero? .....

Definición. La distancia al origen desde un punto cuya coordenada es a es el valor absoluto del número a. Se escribe | a | y se lee valor absoluto de a.

ii) 2 es el valor absoluto de ..... y representa la distancia de ..... al cero.

b) Calcule: $|5| =$ $|0| =$ $\left|-\frac{1}{2}\right| =$

En el inciso **a)i)**, en el 94% de los trabajos se observa que representan correctamente sobre la recta real indicando la distancia de los puntos al cero. Sólo el 64% logra responder bien el inciso **ii)**, a pesar de ser una aplicación básica de la definición.

Algunas de las respuestas que dan los alumnos son:

- 2 es el valor absoluto de 2,
- 2 es el valor absoluto de –2,
- 2 es el valor absoluto de $|2|$ y $|-2|$.

Con respecto al inciso **b)**, el 72 % de los trabajos tuvo resultados correctos. Los errores se detectan en el cálculo de $|5|$ y $\left|-\frac{1}{2}\right|$. Los alumnos dan como solución las dos alternativas, positiva y negativa.

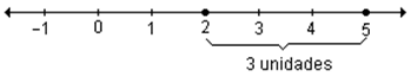
De la observación del trabajo en clase surgió, coincidiendo con Ángel, Polola, Fernández, Bortolotto y Ecalle (2003), que entre los alumnos estaba presente la primera noción de valor absoluto que se presenta en la escuela: "*el valor absoluto de un número es el número sin el signo*" y desconocían que el valor absoluto puede expresarse como distancia. Su aplicación en esta actividad derivó en dificultades de interpretación del concepto. Coincidimos con Cerizola, Pérez y Martínez (2003), quien sostiene que la introducción de la noción aritmética del valor absoluto acarrea obstáculos para la comprensión de otras definiciones.

Consideramos además que las dificultades se relacionan con la exigencia del tratamiento y conversión entre representaciones en distintos registros.

En la siguiente actividad pretendemos que los alumnos amplíen la definición de distancia desde un número cualquiera al cero, a la distancia entre dos números cualesquiera.

Actividad

a) Gráficamente la distancia entre dos puntos de abscisas 2 y 5, resulta:



¿Cómo encontraría la distancia entre ellos empleando la notación de valor absoluto? .....

En general, la distancia entre dos puntos de abscisas cualesquiera a y b se puede calcular .....

b) Según lo concluido en el ejercicio anterior, determine analítica y gráficamente la distancia entre los puntos de abscisas:

i) 1 y 8 **ii)** –6 y –2 **iii)** –4 y 3

El 74% respondió bien al ítem **a)**. Debemos tener en cuenta que se consideró como correcta plantear cualquiera de las dos expresiones que permite calcular la distancia en forma genérica. Prácticamente la mitad de los grupos respondió las dos opciones $|a - b|$ o $|b - a|$.

Con respecto al ítem **b)**, los porcentajes fueron los mismos para los tres incisos. En el 80% de los trabajos se observa que determinaron correctamente la distancia en forma analítica, mientras que gráficamente lo hizo bien el 74%. Llama la atención en este apartado que solamente dos grupos no respondieron en forma analítica mientras que diez no lo hicieron en forma gráfica. Los alumnos están acostumbrados a resolver en forma algebraica y dejan de lado la representación gráfica que los ayudaría a corroborar sus respuestas.

De todas maneras, observamos en el aula que los alumnos pudieron comenzar a resolver esta actividad con menos dificultades. Esto lo asociamos a que en las semanas anteriores, al abordar el estudio de contenidos de geometría, se había desarrollado el cálculo de la distancia entre dos puntos en un sistema coordenado lineal.

Esto nos confirma la importancia de diseñar estrategias que nos permitan abordar los contenidos en diferentes momentos y desde distintos contextos, como una manera de superar los errores, dificultades y obstáculos, especialmente para los conceptos que sabemos ocasionan más dificultades para su comprensión.

El propósito de la siguiente actividad es aplicar la definición de valor absoluto en la resolución e interpretación de una ecuación.

Actividad
a) Escriba en lenguaje coloquial el significado geométrico de $|x| = 3$.
b) Interprete gráficamente.
c) ¿Qué números verifican la igualdad?

A pesar de que la interpretación geométrica del valor absoluto estaba enunciada en la primera actividad, sólo el 22% expresó correctamente en lenguaje coloquial el significado de la igualdad planteada.

Observamos que en once respuestas no interpretan, sólo traducen del lenguaje simbólico al lenguaje coloquial. Escriben: "El valor absoluto de x es igual a 3". Otros quince trabajos expresan con palabras la solución de la ecuación: "x va a valer 3 o –3". En un trabajo no responden y el resto intenta escribir en lenguaje coloquial como los anteriores pero además comete errores. Por ejemplo: "el valor absoluto de x es 3 y –3", "significa que x_1 se encuentra a 3 unidades de distancia de x_2", "la distancia que hay entre dos puntos es 3 unidades".

En cambio en el 80% de los trabajos se detectaron resultados correctos en la tarea de resolver la ecuación e interpretar gráficamente. Los alumnos son capaces de resolver mecánicamente ecuaciones sencillas que involucran valor absoluto pero tienen dificultades para interpretar de manera verbal expresiones dadas en lenguaje simbólico.

En general, encontramos dificultades y resistencia de los alumnos para expresar el significado de distintas situaciones. Consideramos que esto se debe en parte a que no se encuentran preparados para este tipo de actividad. Comúnmente se les pide y valora más las tareas algebraicas y algorítmicas.

En la actividad enunciada a continuación los alumnos deben expresar el significado geométrico de las inecuaciones planteadas y resolverlas. La misma requiere un tratamiento adecuado de representaciones pertenecientes al registro algebraico y la conversión del registro algebraico al geométrico, exigiendo además un manejo conveniente de los lenguajes simbólico, coloquial y gráfico.

Actividad
a) Escriba en lenguaje coloquial el significado geométrico de:
i) $|x| \leq 3$ **ii)** $|x| > 5$
b) Resuelva analítica y gráficamente las inecuaciones:
i) $|x| < 3$ **ii)** $|x| \geq 2$

Con respecto al inciso **a)** las conclusiones son parecidas a las del ejercicio anterior. Aproximadamente el 24% de las respuestas del inciso **i)** y el 28% del inciso **ii)** fueron correctas. Se observaron además algunas dificultades con la utilización de los conectores (y, o) al intentar expresar el conjunto solución de cada inecuación.

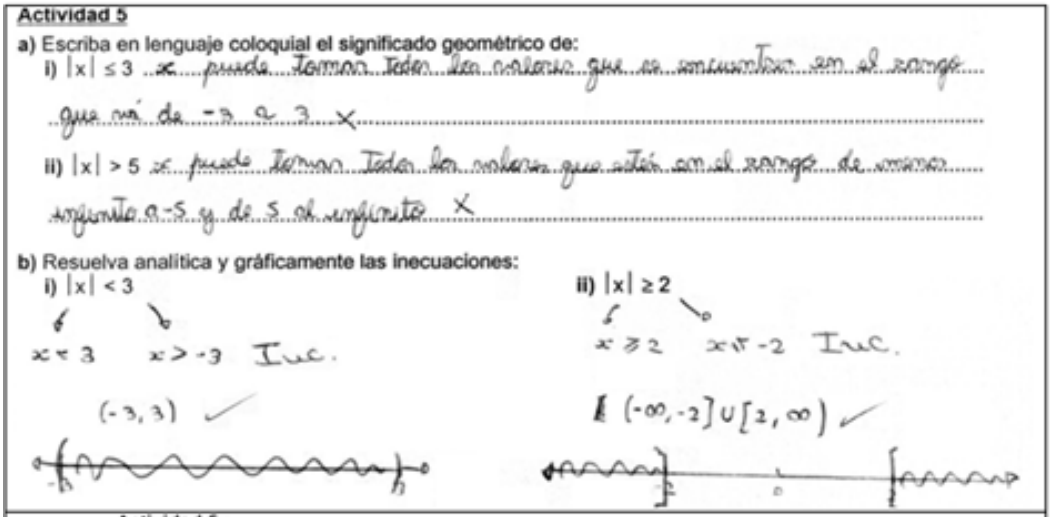
En la primer parte del inciso **b)**, en el 86% de los trabajos resuelven correctamente la inecuación tanto analítica como gráficamente, mientras que sólo en el 48% pueden hacerlo de manera analítica en la segunda parte y en el 74% de manera gráfica.

En general, las inecuaciones con valor absoluto que involucran la desigualdad de mayor generan más dificultades. La mayoría aplica la definición de valor absoluto, considerando dos tramos, resuelve correctamente cada caso, obteniendo las respuestas fragmentadas, pero no es capaz de armar el conjunto solución, tanto analítica como gráficamente, teniendo en cuenta los conectores que corresponden a cada situación.

Del total de producciones, trece indican como conjunto solución $-2 \geq x \geq 2$, lo cual es incorrecto ya que no existen números para los que $x \leq -2$ y $x \geq 2$. En otros doce responden sin hacer uso de conectivos ($x \geq 2$ $x \leq -2$).

De los trabajos que muestran respuestas incorrectas en forma analítica, seis representan gráficamente el intervalo $[-2, 2]$ y los demás $(-\infty, -2] \cup [2,\infty)$.

En los trabajos que mostramos a continuación se observan algunas de las consideraciones hechas.


Actividad 5

a) Escriba en lenguaje coloquial el significado geométrico de:

i) $|x| \leq 3$ x puede tomar todos los valores que se encuentran en el rango que va de -3 a 3 x

ii) $|x| > 5$ x puede tomar todos los valores que están en el rango de menos infinito a -5 y de 5 al infinito x

b) Resuelva analítica y gráficamente las inecuaciones:

i) $|x| < 3$

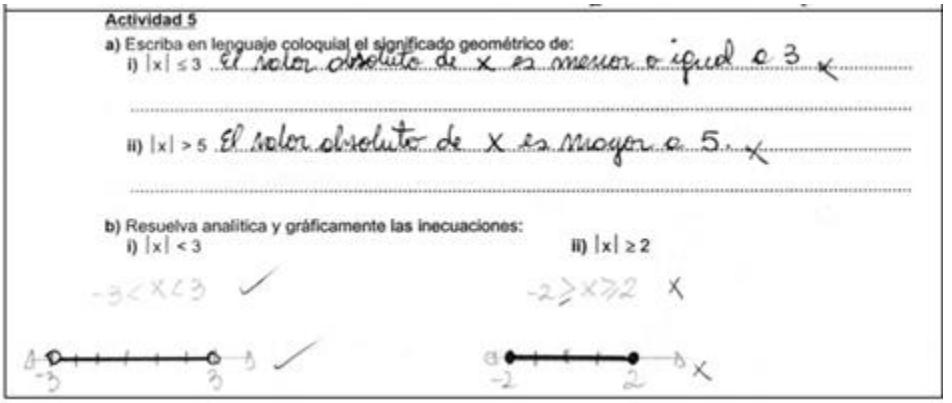
$x < 3$ $x > -3$ Inc.

$(-3, 3)$

ii) $|x| \geq 2$

$x \geq 2$ $x \leq -2$ Inc.

$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$



Actividad 5

a) Escriba en lenguaje coloquial el significado geométrico de:

i) $|x| \leq 3$ El valor absoluto de x es menor o igual a 3 ✗

ii) $|x| > 5$ El valor absoluto de x es mayor a 5. ✗

b) Resuelva analítica y gráficamente las inecuaciones:

i) $|x| < 3$ ii) $|x| \geq 2$

$-3 < x < 3$ ✓ $-2 \geq x \geq 2$ ✗

Las actividades que se presentan a continuación requieren el pasaje de una expresión perteneciente al registro algebraico expresada en forma simbólica al registro geométrico expresada en lenguaje coloquial. Si bien por un lado presentan mayor dificultad por plantear la distancia entre dos números distintos del cero, se presentaron las actividades como problemas de opción múltiple.

Actividad

Elija lo opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x - 2| < 5$ significa:

a) todos los números reales que se encuentran a cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

b) todos los números reales que se encuentran a menos de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

d) todos los números reales que se encuentran a cinco o a menos de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

Actividad

Elija lo opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x + 3| \geq 1$ significa:

a) todos los números reales que se encuentran a tres unidades o a más de tres unidades de distancia del uno en la recta numérica.

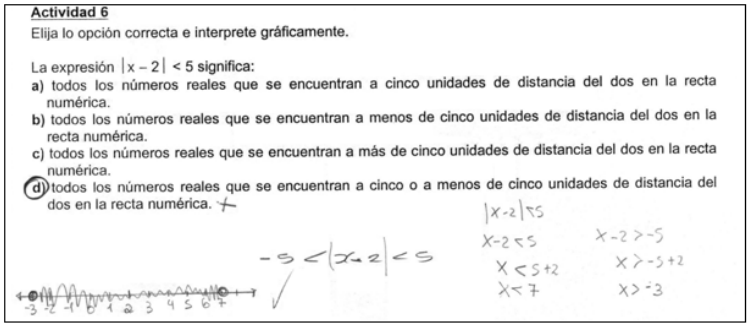
b) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del tres en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de una unidad de distancia del -3 en la recta numérica.

d) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del -3 en la recta numérica.

Nos llama la atención la cantidad de trabajos en los que se observa que no interpretan gráficamente (doce en la primer actividad y diecisiete en la segunda), ya que esperábamos que los alumnos utilicen diversos recursos, por ejemplo representar gráficamente las distintas alternativas, para encontrar la respuesta correcta.

A continuación mostramos las producciones de algunos alumnos.



Actividad 6

Elija lo opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x - 2| < 5$ significa:

a) todos los números reales que se encuentran a cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

b) todos los números reales que se encuentran a menos de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

d) todos los números reales que se encuentran a cinco o a menos de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

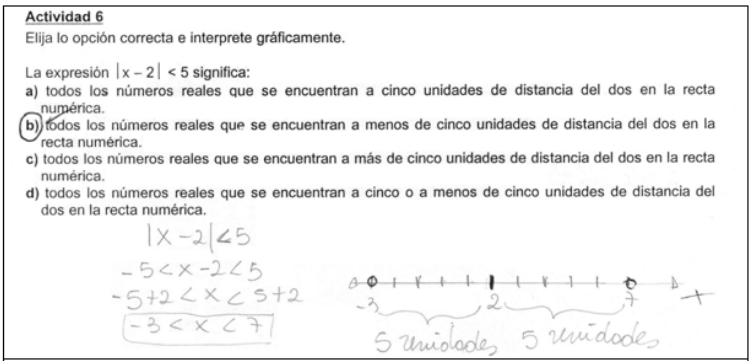
$|x-2|<5$

$x-2<5$ $\quad$ $x-2>-5$

$x<5+2$ $\quad$ $x>-5+2$

$x<7$ $\quad$ $x>-3$

$-5<|x-2|<5$



Actividad 6

Elija lo opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x - 2| < 5$ significa:

a) todos los números reales que se encuentran a cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

b) todos los números reales que se encuentran a menos de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

d) todos los números reales que se encuentran a cinco o a menos de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

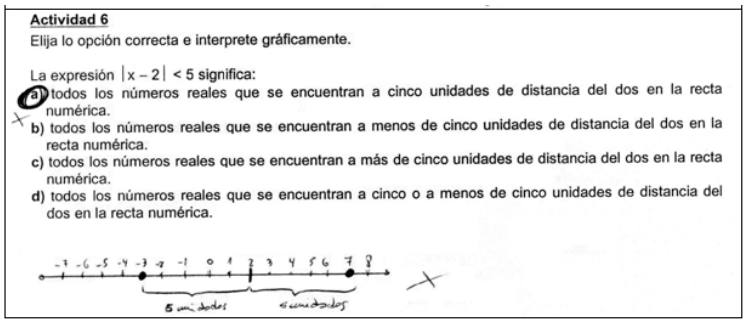
$|x-2|<5$

$-5<x-2<5$

$-5+2<x<5+2$

$\boxed{-3<x<7}$

5 unidades 5 unidades



Actividad 6

Elija lo opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x - 2| < 5$ significa:

a) todos los números reales que se encuentran a cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

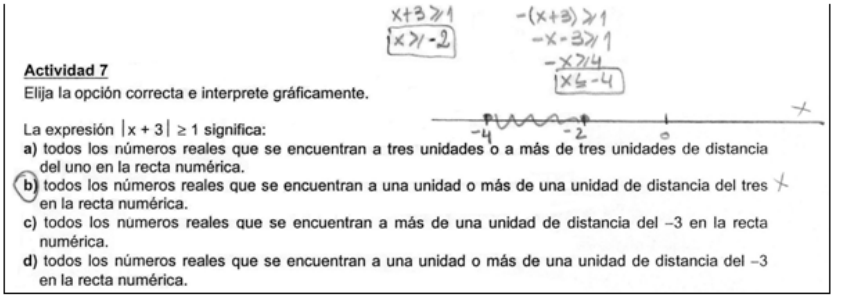
b) todos los números reales que se encuentran a menos de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

d) todos los números reales que se encuentran a cinco o a menos de cinco unidades de distancia del dos en la recta numérica.

5 unidades 5 unidades

Con respecto a esta actividad notamos que, en general, los alumnos no recurren a la interpretación geométrica sino que resuelven analíticamente la inecuación. Se detectan problemas con las expresiones simbólicas e incoherencias entre la opción marcada y la representación gráfica.



Actividad 7

Elija la opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x + 3| \geq 1$ significa:

a) todos los números reales que se encuentran a tres unidades o a más de tres unidades de distancia del uno en la recta numérica.

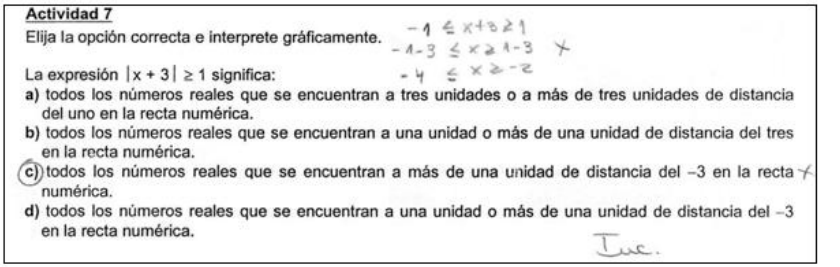
b) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del tres en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de una unidad de distancia del –3 en la recta numérica.

d) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del –3 en la recta numérica.

Nuevamente observamos que en la mayoría de los trabajos los alumnos recurrieron a la resolución algebraica para obtener la solución de la inecuación.

El grupo que elaboró este trabajo particular, aplica la definición de valor absoluto, separando en dos inecuaciones, resuelve correctamente cada una, pero por lo que se observa en la representación gráfica, no interpreta correctamente la solución obtenida. Además, la opción que elige no se corresponde con lo obtenido analítica ni gráficamente.



Actividad 7

Elija la opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x + 3| \geq 1$ significa:

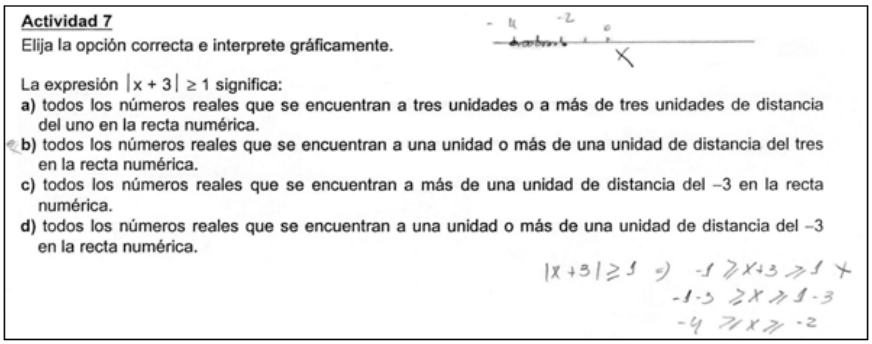
a) todos los números reales que se encuentran a tres unidades o a más de tres unidades de distancia del uno en la recta numérica.

b) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del tres en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de una unidad de distancia del –3 en la recta numérica.

d) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del –3 en la recta numérica.

En este caso los alumnos plantean mal la inecuación, presentando problemas con los símbolos. Si bien no representan gráficamente, suponemos que para dar la respuesta recurrieron a la interpretación geométrica pues eligen la opción **c)** que no coincide con lo que obtienen analíticamente. Esta respuesta no es la correcta pues no incluye los extremos del intervalo pero es la que más se aproxima.



Actividad 7

Elija la opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x + 3| \geq 1$ significa:

a) todos los números reales que se encuentran a tres unidades o a más de tres unidades de distancia del uno en la recta numérica.

b) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del tres en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de una unidad de distancia del –3 en la recta numérica.

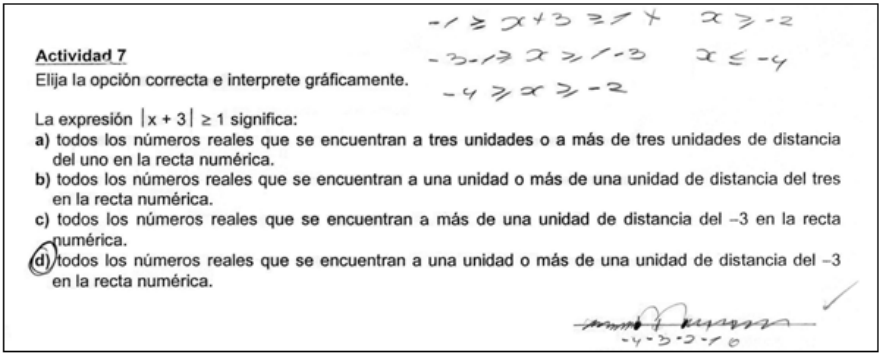
d) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del –3 en la recta numérica.

$|x+3| \geq 1$ a) $-1 \geq x+3 \geq 1$

$-1-3 \geq x \geq 1-3$

$-4 \geq x \geq -2$

En esta oportunidad presentan problemas en la resolución analítica con el planteo de las desigualdades. Nuevamente hay incoherencia entre la respuesta obtenida, la interpretación gráfica y la respuesta marcada.



$-1 \geq x+3 \geq 1$ $\quad x \geq -2$

$-3-1 \geq x \geq 1-3$ $\quad x \leq -4$

$-4 \geq x \geq -2$

Actividad 7

Elija la opción correcta e interprete gráficamente.

La expresión $|x + 3| \geq 1$ significa:

a) todos los números reales que se encuentran a tres unidades o a más de tres unidades de distancia del uno en la recta numérica.

b) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del tres en la recta numérica.

c) todos los números reales que se encuentran a más de una unidad de distancia del –3 en la recta numérica.

d) todos los números reales que se encuentran a una unidad o más de una unidad de distancia del –3 en la recta numérica.

$-4\ -3\ -2\ -1\ 0$

En el último trabajo que presentamos, la resolución algebraica es similar a la anterior, pero luego expresan cada tramo de solución por separado, sin usar conectivos. Interpretan gráficamente de manera adecuada y eligen la opción correcta.

Con respecto a la siguiente actividad, el primer inciso requiere convertir del registro geométrico al algebraico, una expresión dada en lenguaje coloquial a otra en lenguaje simbólico. En los incisos siguientes deben resolver la inecuación planteada y escribir el conjunto solución.

Actividad
a) Utilice el concepto de valor absoluto para expresar simbólicamente "todos los números reales que distan como mínimo 3 unidades del –2"
b) Halle todos los valores de x reales que verifican esta afirmación.
c) Escriba la solución en notación conjuntista y como intervalo.

El 64% del total responde correctamente el primer inciso. Llama la atención que sólo el 48% resuelve correctamente el inciso **b)**. Cometen errores al resolver la inecuación con valor absoluto planteada en el primer inciso. No verifican la solución con lo expresado en forma coloquial en el enunciado.

Con respecto al conjunto solución presentan más dificultades para expresarlo en notación conjuntista.

REFLEXIONES

Si bien el concepto de valor absoluto se aborda en la escuela media, en general, las ideas que aparecen en el diálogo inicial con los alumnos que comienzan una carrera universitaria no permiten reconocer el trabajo sobre la recta numérica para establecer su significado de manera geométrica relacionándolo con la idea de distancia. El análisis de las producciones de los alumnos nos muestra que presentan numerosas dificultades en el manejo del concepto.

Además sugieren que se relacionan con ideas erróneas o incompletas y con asociaciones incorrectas que realizan entre diferentes nociones. Las respuestas revelan que, en general, privilegian un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más. Las resoluciones se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia favorecido en las clases.

La resolución de las actividades diseñadas para visualizar la ubicación en la recta real de números distintos de igual valor absoluto, permitió establecer la conexión existente entre la posición de los números respecto al cero y su valor absoluto.

De esta manera resultó posible relacionar la definición de valor absoluto de un número con la noción de distancia de este número al cero y posteriormente la distancia entre dos números cualesquiera de la recta para poder abordar luego la resolución gráfica y analítica tanto de ecuaciones como de inecuaciones sencillas.

Al trabajar con los alumnos la resolución de ecuaciones e inecuaciones sencillas teniendo en cuenta la interpretación geométrica del valor absoluto como distancia fue posible llegar al enunciado de las propiedades de una manera más sencilla evitando la complejidad generada al tratarse como una serie de enunciados a partir de una definición formal. Resultó muy importante la institucionalización de la propuesta.

El diálogo e intercambio de ideas con los alumnos resultó muy positivo ya que nos permitió escuchar las explicaciones a sus procedimientos y comprender de esta manera el por qué de los mismos y, a partir de sus propias explicaciones propiciar la generación y construcción de nuevas ideas.

La utilización de sus propias producciones para el abordaje de los nuevos contenidos resultó motivante para el desarrollo de la clase siguiente a la realización de las actividades.

Para concluir podemos decir que, como docentes interesados en el aprendizaje, indagar tanto sobre los conocimientos que un estudiante tiene acerca de los diferentes conceptos así como los errores que comete al hacer uso del mismo, servirán de base para abordar nuevos contenidos.

Así mismo, el tratamiento de los errores es una herramienta importante en la identificación de problemas y dificultades pero fundamentalmente colabora en la comprensión de sus procesos cognitivos. Seguramente, trabajando de esta manera lograremos construir con nuestros alumnos una estructura conceptual cada vez más sólida.

ALGUNAS ACCIONES

Con el fin de mejorar los resultados, todo el trabajo realizado se constituyó en una herramienta para repensar y realimentar nuestra labor docente tanto de manera inmediata, para abordar los temas siguientes del programa analítico de Matemática II así como pensar en estrategias para mejorar el trabajo con el concepto valor absoluto en el siguiente ciclo lectivo.

Así, nos propusimos como principales acciones para los temas siguientes:

- El diseño de diferentes situaciones de aprendizaje para algunos temas específicos (límite, continuidad, derivada de una función en un punto, estudio del comportamiento de la gráfica de una función, entre otros), de manera de ayudar a nuestros alumnos para que, a partir de sus conocimientos previos, errores y dificultades, puedan ponerse en camino hacia la construcción de conocimiento.

- Propiciar el debate y discusión de los errores, tanto en formar grupal como individual, no solo durante el dictado de la asignatura sino también durante las clases de consulta.

- La reflexión continua sobre nuestras prácticas docentes a fin de tomar decisiones a tiempo con relación a nuestro desempeño cotidiano en el aula.

- La investigación permanente y la búsqueda de nuevas estrategias para el aula.

Con relación a las acciones para el año siguiente, esperamos comenzar a trabajar estas ideas desde el dictado de Matemática I, en el momento en que se aborda la función valor absoluto. La propuesta es el diseño de nuevas situaciones de aprendizaje que busquen superar los errores y las dificultades en la construcción del concepto para lograr, además, ir más allá de considerar el valor absoluto dentro del contexto analítico (como función) y llevarlo al numérico y métrico y propiciar los diferentes usos de dicho objeto matemático.

La meta es transponer los diversos usos o significados del valor absoluto a partir de diferentes estrategias. Para ello habrá que utilizar en los diseños procedimientos que corresponden al registro algebraico junto con los que aporta el registro gráfico especialmente para realizar una buena conexión entre la definición de valor absoluto como función y la acción que el valor absoluto realiza sobre los números negativos.

Otra cuestión importante será incluir en las actividades el uso del registro gráfico para la resolución tanto de ecuaciones como de inecuaciones que permitan favorecer el aprendizaje de propiedades que facilitan el pensamiento algorítmico y el desarrollo de procedimientos algebraicos.

Realizado esto, será necesario un debate, análisis y puesta a punto de la situación de aprendizaje presentada en parte en este artículo a fin de modificarla, actualizarla y mejorarla en relación a los objetivos propuestos en ese momento.

Un desafío constante es poder desarrollar estrategias de enseñanza basadas en la cooperación, es decir poder brindar al alumno un espacio donde se le permita descubrir qué sabe y qué es capaz de generar desde su trabajo con las ideas matemáticas así como darle oportunidad de participar activamente en el desarrollo de los nuevos conceptos en su doble rol de objetos y herramientas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ángel, M.; Polola, L.; Fernández, G.; Bortolotto, M. y Ecalle, M. (2003). *Aprendiendo matemática desde los conceptos.* Universidad Nacional de La Matanza. Recuperado el 28 de mayo de 2015 de http://repositoriocyt.unlam.edu.ar/biblioteca/B077.pdf

Cerizola, N.; Pérez, N. y Martínez, R. (2003). *Una noción matemática básica y aparentemente simple: el valor absoluto de un número real.* Universidad Católica de Córdoba. Recuperado el 08 de junio de 2015 de http://www.uccor.edu.ar/paginas/REDUC/cerizola.pdf

Confrey, J. (1990). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Sciense and Programming. *Review of Research in Education, 16.* Washington, D.C.: American Educational Research Association, 3-56.

Confrey, J. (1991). *Learning to Listen: A Student´s Understanding of Powers of Ten. In Radical Constructivism in Mathematics Education*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II.* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Engler, A.; Gregorini, M.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Premisa. 6 (23)*, 23- 32.

Farfán, R. (2013). *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de precálculo.* México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado el 03 de junio de 2015 de http://www.sems.gob.mx /work/models/sems/Resource/6586/1/images/lenguaje_grafico_de_funciones_baja.pdf

García, C. (2014). *Criterios de idoneidad didáctica como guía para la enseñanza y el aprendizaje del valor absoluto en el primer ciclo del nivel universitario.* Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Godino, J.; Batanero C. y Font V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros.* Recuperado el 5 de mayo de 2015 de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Morin, E. (2000). *La mente bien ordenada.* Barcelona: Seix Barral.