

LA COMPONENTE VISUAL DE LA GEOMETRÍA EN LOS LIBROS DE TEXTOS DE SECUNDARIA

Manuel Barrantes López, Idalgo Balletbo Fernández y Marco López López
Facultad de Educación. Universidad de Extremadura (España). Facultad de Ciencias Aplicadas y
Facultad de Ciencias Contables, Administrativas y Económicas. Universidad Nacional de Pilar
(Paraguay).
barrante@unex.es, ipsjb@yahoo.es, marco_ta_c@hotmail.com

RESUMEN

Presentamos una investigación sobre la Geometría contenida en libros de texto actuales y centrada en su característica más importante e inseparable: su componente visual. Repasamos las principales consideraciones sobre la Geometría y su visualización, que nos han conducido a establecer varias categorías de análisis utilizadas para la evaluación de los textos. Así mismo, desarrollamos el estudio del análisis efectuado con los textos en base a las categorías establecidas. Se ponen de manifiesto las deficiencias de las representaciones geométricas en las representaciones de los textos en base a las diferencias y/o tendencias generales de los mismos.

PALABRAS CLAVE: Geometría, Visualización, Enseñanza, Aprendizaje, Imágenes, Errores, Libros de textos.

CONSIDERACIONES SOBRE LA GEOMETRÍA Y SU VISUALIZACIÓN

Coincidimos con Figueiras y Deulofeu (2005) en considerar la visualización un aspecto clave para las Matemáticas tanto en la resolución de problemas, como en su efecto sobre el significado que se atribuye a la matemática. Las enseñanzas de tendencia tradicional y en los libros de textos es frecuente encontrarse con ciertos estilos generalizados sobre las figuras y los conceptos geométricos, que crean esquemas mentales inadecuados para que el alumno desarrolle un pensamiento abierto y divergente (Barrantes y Zapata, 2008). Dichos estilos obstaculizan los procesos de abstracción y la agilidad en el manejo de ideas y contenidos.

Es notorio que algunos estudiantes muestran errores que no evolucionan ni son corregidos durante los distintos niveles educativos. Estos errores suelen perdurar durante toda su formación académica incluso son detectados en su formación de maestros por lo que si no son subsanados pueden ser transmitidos a sus futuros alumnos (Contreras y Blanco, 2001).

También ha sido probado y hemos experimentado en nuestro trabajo docente la resistencia que los estudiantes para maestro ponen para eliminar los errores, incluso después de comprobar su falsedad, lo que muestra su profunda interiorización de la que se ven influidas sus concepciones (Gómez, 1996).

Así pues, Barrantes y Zapata (2008) distinguen entre varios elementos que pueden causar obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas como son: *la simbología visual del concepto, distractores de orientación, distractores de estructuración, imágenes reales de conceptos*, entre otros.

La simbología visual del concepto se refiere a que algunos libros de textos presentan las distintas figuras geométricas mediante un único dibujo o un número tan pequeños de ellos que el alumno construye esquemas conceptuales estándar sobre ellas (cuadriláteros, prismas, etc.) que suelen alejarse de la verdadera definición del concepto.

Los distractores de orientación son aquellas propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto. En el tema de Ángulos podemos observar como éstos suelen ser presentados con un lado horizontal paralelo al borde inferior del libro. Los alumnos incluyen en su esquema conceptual de ángulo dicho atributo de forma que consideran que siempre tienen que dibujarlos con un lado horizontal, sobre todo el ángulo obtuso (Figura 1). También, Azcárate (1997) expresa cómo diferentes grupos de alumnos confunden verticalidad y perpendicularidad al trazar las alturas de triángulos situados en posición no estándar.

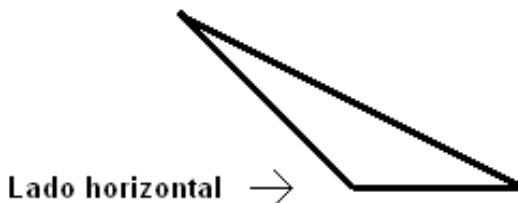


Figura 1. Lado horizontal paralelo al borde del libro

Los distractores de estructuración se refieren a una presentación débil del concepto en el que ciertos elementos y propiedades son excluidos, probablemente sin intención. Un ejemplo alusivo a estos distractores es la presentación de los triángulos isósceles con los lados iguales siempre más grande que el lado desigual y siempre apoyado sobre este lado. Otro ejemplo de este tipo de distractor es la presentación de polígonos y poliedros siempre convexos junto con escasas o nulas figuras cóncavas.

Con respecto *a las imágenes reales de conceptos*, sabemos que los conceptos en Geometría son distintos de sus representaciones externas por lo que son difícilmente dissociables de ellas. A la complicación que supone el separar el objeto abstracto del real, se añade otras veces la presentación en los libros de textos de fotografías que no son muy adecuadas para una primera presentación del sólido correspondiente. Así observamos caramelos de palo con superficie rugosa e irregular, como ejemplo de esfera; botes de bebidas con extremos curvados como ejemplos de cilindros, o jabones con formas redondeadas y con huecos como ejemplos de prismas.

Moriena y Scaglia (2003) detectaron que los alumnos presentan dificultades a la hora de identificar figuras geométricas si estas difieren de las representaciones habituales o estereotipos presentes en los libros de texto. Consideran, por ejemplo, que la representación gráfica estereotipada del cuadrado y del rectángulo se caracteriza porque los lados son paralelos a las líneas horizontal y vertical; y la de la pirámide se caracteriza porque la base se apoya sobre el plano horizontal. Concluyen que es necesario que los alumnos apliquen sus conocimientos conceptuales de las figuras geométricas sobre dibujos no estereotipados de éstas.

Para una buena formación de la imagen de un concepto, son importantes la propia experiencia y los ejemplos utilizados tanto en el contexto escolar como social. Cuando estos ejemplos son pocos y además tienen característica visual distintiva, se transforman en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante cuenta al enfrentarse a la identificación de nuevas figuras. En concordancia con esto, Azcárate (1997) sostiene que un esquema conceptual no se forma a partir de las definiciones, cómo suponen algunos profesores y autores de libros de texto, sino que forma a partir de la experiencia. Por lo tanto, uno de los aspectos claves a la hora de presentar las figuras geométricas es el número y variedad de representaciones que se utilizan.

En este mismo sentido, se manifiestan Barrantes y Zapata (2008) y Vinner y Hershkowitz (1983) que consideran que deberían introducirse una variedad de ejemplos en una variedad de orientaciones en el momento de presentar los conceptos geométricos. Siguiendo sobre esta cuestión, Gonzato, Godino y Neto (2011) señalan que en las tareas de visualización espacial este conocimiento no es fácil de expresar por los maestros en formación, es decir, los maestros encuentran dificultades al transmitir a sus alumnos conocimientos sobre visualización tridimensional. Los resultados de algunas investigaciones con alumnos corroboran algunas de las sentencias establecidas:

- Guillén (2000) en su investigación con estudiantes para magisterio y niños de 12 años afirma que *“Algunas ideas erróneas que los estudiantes incluyen en el objeto mental constituido para algunas familias de sólidos provienen de distractores visuales”* (p. 45).

- García y Guillén (2010) concluyen que en los libros de texto analizados *“La mayoría de los sólidos se siguen representando en posición estándar”* (p. 335).

- Moriena y Scaglia (2003) en su trabajo con niños de 13 años afirma que *“Tal como esperábamos, 72% confunde el prisma 5 con una pirámide. ... La confusión se agudiza por la posición del prisma 5 (apoyado sobre una cara lateral y no sobre una base) que no responde a la posición de la representación gráfica estereotipada”* (p. 12).

- En su estudio sobre la visualización de objetos tridimensionales de maestros en formación, Gonzato, Godino y Contreras (2011) obtienen como resultado que *“el conocimiento común sobre visualización de objetos tridimensionales de los futuros profesores evaluados no es el esperado: el 62% de los alumnos no contesta de forma óptima a las tareas sacadas de libros de textos primaria”* (p. 389).

En definitiva, las referencias consultadas nos dicen que los libros de textos nos dan una visualización pobre o poco adecuada de la Geometría cuando un concepto o figura se introduce mediante pocas representaciones, si no se cuidan los dibujos de figuras tridimensionales, si estas representaciones son estereotipos (presentan distractores) y si, además, las imágenes reales utilizadas no son las más adecuadas.

INVESTIGACIÓN SOBRE LAS IMÁGENES EN LOS LIBROS DE TEXTOS. ESTUDIO DE LAS REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS

Actualmente nuestro equipo de investigación ha analizado y clasificado las imágenes gráficas relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la geometría en los libros de textos. El trabajo se ha centrado en estudiar varios aspectos de las representaciones geométricas a lo largo de las unidades de Geometría de los libros. Algunos de estos aspectos clave son: la variedad de representaciones al introducir las figuras y conceptos geométricos, los elementos de estas imágenes que puedan derivar en dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría y las imágenes reales que se utilizan para aludir a elementos geométricos abstractos.

El primer proceso es el análisis previo de los libros de texto, ya que representa una primera toma de contacto con el material que será objeto de análisis. Este proceso se realiza en dos fases: una primera fase de primer contacto con los libros y una segunda enfocada a seleccionar la muestra de libros definitiva. Para obtener los datos sobre utilización de los libros consideramos todos los centros privados/concertados y públicos de las ciudades más pobladas de la región (Badajoz, Cáceres y Mérida) que impartan enseñanzas correspondientes a la etapa de la ESO (primer curso).

Una vez obtenida la relación de libros utilizados por dichos centros consideramos las editoriales de mayor impacto llegando a seleccionar tres libros de textos. A partir de la literatura consultada se llegó a establecer cinco categorías de análisis, que son las expuestas en la tabla siguiente (Figura 2).

Categoría	Código
Presentación de las figuras y conceptos geométricos	PFC
Representación plana de figuras tridimensionales	RFT
Distractores de orientación	DO
Distractores de estructuración	DE
Imágenes reales de figuras y conceptos geométricos	IRC

Figura 2. Categorías para el análisis de los libros de textos

A continuación comentamos cada una de estas categorías y algunos de los resultados obtenidos en la investigación con los textos seleccionados.

CATEGORÍA 1: PRESENTACIÓN DE LAS FIGURAS Y CONCEPTOS GEOMÉTRICOS (PFC)

En esta categoría estudiamos el número de representaciones distintas utilizadas al introducir un elemento geométrico, ya sea una figura o un concepto. Nos interesa analizar, para cada libro de texto, qué figuras y conceptos se presentan en cada unidad de Geometría y cuántos dibujos distintos se utilizan en el momento de la presentación. Los resultados nos indican que los libros de texto exponen una variedad escasa de representaciones en el momento de presentar las figuras y conceptos geométricos. La tendencia general entre los libros de texto estudiados es que la mayoría de las figuras y conceptos sólo cuentan con una única representación distinta a la hora su presentación.

En la siguiente tabla (Figura 3) se compara la media de representaciones entre las distintas editoriales y entre las diferentes unidades temáticas de los textos.

	Elementos geométricos	Figuras planas	Áreas y perímetros	Cuerpos geométricos
SM	1,28	1,04	1,28	0,90
Anaya	1,80	1,91	1,67	1,91
Santillana	1,81	1,92	1,71	1,10

Figura 3. Número medio de representaciones distintas al presentar figuras y conceptos

CATEGORÍA 2: REPRESENTACIÓN PLANA DE FIGURAS TRIDIMENSIONALES (RFT)

Dentro de esta categoría, serán objeto de estudio todas las representaciones expuestas en los libros de texto de figuras o situaciones tridimensionales. Existe una correlación fuerte y directa entre el tipo de sólido y la perspectiva utilizada en su representación plana en los libros de texto. Al observar estas representaciones, hemos podido constatar que hay predilección por representar los sólidos en perspectiva axonométrica ortogonales (trimétrica, dimétrica e isométrica) y perspectiva axonométrica oblicua (caballera). Sólo en un caso encontramos alguna representación en perspectiva cónica.

Consideramos entonces que los alumnos que utilicen estos textos han de familiarizarse con este tipo de sistemas de representación de figuras tridimensionales.

CATEGORÍA 3: DISTRACTORES DE ORIENTACIÓN (DO)

En esta categoría analizaremos la presencia en los libros de texto de los distractores de orientación. Recordemos que estos elementos podemos definirlos como propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto. Dentro de esta categoría incluimos siete subcategorías de análisis, una por cada distractor de orientación considerado, como podemos ver en la siguiente tabla (Figura 4).

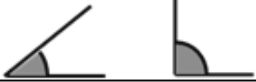

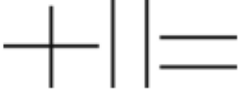
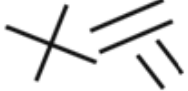


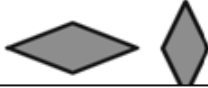







Código	Subcategoría	Figuras	
		<i>Estereotipos</i>	<i>No estereotipos</i>
DO-alh	<i>Ángulos apoyados sobre un lado horizontal</i>		
DO-rpp	<i>Rectas paralelas y perpendiculares que son horizontales y verticales</i>		
DO-tra	<i>Triángulos rectángulos apoyados sobre los catetos</i>		
DO-rav	<i>Rombos apoyados sobre un vértice</i>		
DO-tap	<i>Trapezios apoyados en uno de los lados paralelos</i>		
DO-sab	<i>Sólidos apoyados sobre la base</i>		
DO-pal	<i>Polígonos apoyados sobre un lado horizontal</i>		

Figura 4. Distractores de orientación

La mayoría de las representaciones geométricas contempladas en los libros de texto son estereotipos: se presentan en posiciones y orientaciones estándar (distractores de orientación). De forma general, la presencia de distractores de orientación (DO) es muy marcada en los libros de texto estudiados. Comprobamos que el número de figuras estereotipadas es siempre superior al de no estereotipadas en todas las subcategorías de DO.

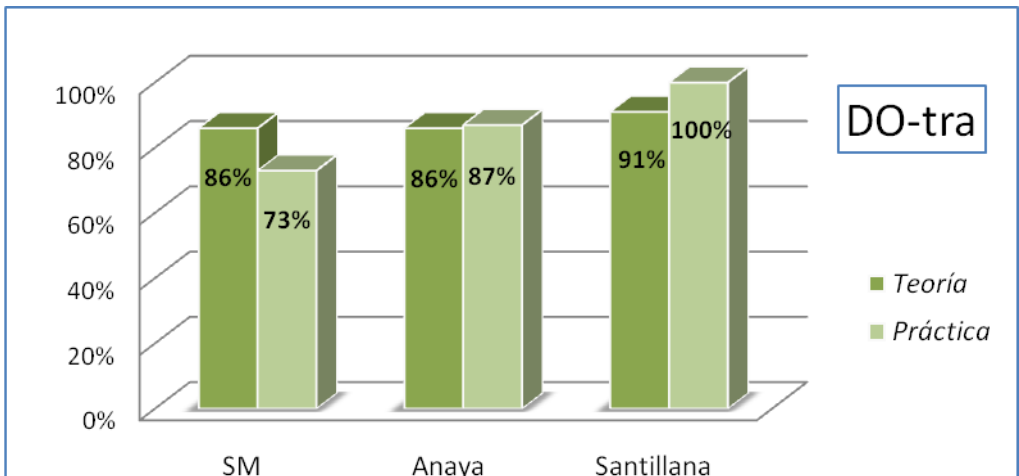


Figura 5. Análisis conjunto de la subcategoría DO-tra

Por ejemplo, en DO-tra (Figura 5) vemos que casi todos los triángulos rectángulos presentados por las tres editoriales se representan de forma estándar a lo largo de todas las unidades de Geometría tanto en los contenidos teóricos como en los prácticos.

En general observamos que las figuras con ángulos se orientan de forma que éstos se apoyan, la mayor parte de las veces, sobre lados horizontales. Las rectas perpendiculares se dibujan siempre paralelas a los bordes del libro de texto y las rectas paralelas se exponen en diversos tipos de posiciones.

También, los rombos se representan apoyados sobre un vértice, siendo sus diagonales paralelas a los márgenes del libro. Los trapecios se apoyan sobre uno de sus lados paralelos y la mayoría de los polígonos se apoyan sobre un lado horizontal.

La mayor parte de los prismas, pirámides, conos y cilindros se apoyan sobre la base y, en general, los demás sólidos se apoyan sobre una de sus caras planas.

CATEGORÍA 4: DISTRACTORES DE ESTRUCTURACIÓN (DE)

En esta categoría analizaremos la presencia en los libros de texto de los distractores de estructuración, estos elementos podemos definirlos como representaciones de un concepto en el que ciertas propiedades y elementos son excluidos, en principio, sin intencionalidad. Dentro de esta categoría incluimos cinco subcategorías de análisis, una por cada distractor de estructuración considerado.











Código	Subcategoría	Figuras	
		<i>Estereotipos</i>	<i>No estereotipos</i>
DE-til	<i>Triángulos isósceles con los lados iguales mayores que el desigual</i>		
DE-amc	<i>Alturas y mediatrices que se cortan en un punto interior</i>		
DE-uav	<i>Triángulos con una única altura vertical</i>		
DE-fpc	<i>Figuras planas convexas</i>		
DE-amb	<i>Sólidos con la altura mayor que el ancho de la base</i>		

Figura 6. Distractores de estructuración

En el caso de los distractores de estructuración (DE), resaltamos las diferencias existentes entre los dos momentos estudiados: en general hay porcentajes muy elevados de estereotipos en la parte de exposición teórica, que en muchos casos se reducen significativamente en la parte práctica. Hay grandes diferencias entre editoriales en todas las subcategorías de DE analizadas, con lo que no es fácil establecer sentencias generales acerca de cada distractor analizado. En cualquier caso, podemos apreciar que en general los triángulos isósceles se dibujan con los lados iguales mayor que el lado de desigual. El punto de corte de las alturas y las mediatrices de un triángulo se produce en el interior del mismo.

En el caso de triángulos que se representan con una única altura, ésta es vertical. Además, hay que recalcar que si no se refieren al caso explícito de corte de alturas, todos los demás triángulos dónde se exponen alturas ésta es única. La mayoría de los polígonos dibujados son convexos en la parte de teoría y en la práctica hay un número similar de polígonos cóncavos y convexos.

Los sólidos representados en los textos siempre son convexos. Los conos, cilindros, pirámides y prismas se dibujan en general, con un ancho de base menor que la longitud de la altura.

CATEGORÍA 5: IMÁGENES REALES DE FIGURAS Y CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

Dentro de esta categoría, serán objeto de estudio todas las representaciones reales (fotografías y dibujos) en los libros de texto de figuras o conceptos geométricos. Tenemos en cuenta cuántas imágenes reales incluyen los libros de texto. Para cada imagen discutimos si es apropiada o si puede ocasionar confusiones o si podemos considerarla inadecuada.

	Elementos geométricos	Figuras planas	Áreas y perímetros	Cuerpos geométricos
SM	5	6	5	12
Anaya	1	4	0	1
Santillana	2	6	3	4

Figura 7. Número de imágenes reales en valor absoluto

Las imágenes y dibujos reales utilizados en los libros de texto sobre objetos y situaciones geométricas son escasas, aunque las que aparecen suelen ser adecuadas a las figuras o conceptos que aluden. Podemos observar diferencias entre las tres editoriales en cuanto al número de representaciones de este tipo que se incluyen en los textos y también en la distribución de éstas en función de la unidad estudiada. Así pues, SM es la que más ilustraciones de este tipo incorpora y Anaya la que menos. Además, se observa que se utilizan más imágenes de este tipo en las unidades de figuras planas y de cuerpos geométricos que en las de elementos geométricos y de áreas y perímetros (Figura 7).

CONCLUSIONES FINALES

La visualización de la Geometría de los libros de texto analizados, con un índice alto de utilización en la Comunidad Autónoma de Extremadura, presenta algunas deficiencias como son que los conceptos y figuras geométricas se introducen utilizando pocas representaciones y, además, estas representaciones no son muy variadas, siendo en la mayor parte de los casos estereotipos con características de orientación estándar. El uso de estos materiales puede derivar en dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, sobre todo si no se acompañan de otros recursos dedicados a contrarrestar estas deficiencias.

Por ello, es preciso que los docentes, antes de utilizar un libro de texto, realicen una exploración crítica de la visualización de la Geometría en los términos descritos en esta investigación, para poder guiar a sus alumnos adecuadamente durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El profesor debe utilizar más representaciones distintas a las expuestas en los textos, procurando utilizar una variedad amplia de orientaciones y disponiendo los elementos de las figuras en distintas situaciones. Hay que intentar exponer casos particulares y especiales para enriquecer el esquema conceptual que forman los alumnos sobre una figura o concepto geométrico.

Es importante realizar actividades manipulativas con diversos materiales, orientando su uso de forma que se expongan situaciones con posiciones y propiedades no estándar, así como diseñar actividades con software informático dedicado a la Geometría, ya que con estas herramientas dinámicas proporcionamos un entorno idóneo para explorar orientaciones y propiedades de objetos y situaciones geométricas.

También, el profesor debe proponer actividades con imágenes, fotografías y videos sobre elementos geométricos en la realidad, teniendo especial cuidado en la adecuación de éstos como sustitutos de los elementos geométricos abstractos.

Por último, debe dedicar parte del tiempo de docencia de la materia a proporcionar a los alumnos las herramientas necesarias para introducir los sistemas de representación de figuras tridimensionales y desarrollar la visión espacial.

Aunque actualmente, el uso de los libros de texto es muy amplio en el panorama educativo, las nuevas tecnologías aplicadas a la educación están proporcionando las condiciones idóneas para el cambio de paradigma. En la actualidad, las nuevas tecnologías proporcionan múltiples recursos de aplicación a los procesos de enseñanza-aprendizaje. Los libros de texto digitales se vislumbran como sucesor de los libros de texto convencionales.

Estos nuevos libros tienen potencial para solucionar todas las deficiencias que encontramos en los libros actuales, en cuanto a la visualización de la Geometría, pues su interactividad y dinamismo pueden proporcionar entornos geométricos digitales manipulables por alumnos y profesores, lejos de la pasividad del libro de texto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?. *Suma*, 25, 23-30.

- Barrantes, M., & Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71.
- Contreras, L. & Blanco, L. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. En E. Perales, A. L. García, y otros (Eds.), *Congreso Nacional de Didácticas específicas. Vol II. G. Ed.* Universidad de Granada.
- Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 217-226.
- García, M. A., & Guillén, G. (2010). Aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en la ESO a libros de texto de tres editoriales. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 327-340). Lleida: SEIEM.
- Gonzato, M., Godino, J. D., & Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, & M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 383-392). Ciudad Real: SEIEM.
- Gonzato, M., Godino, J. D., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23(3), 5-37.
- Gómez, B. (1996). Mecanismos de una falta de competencia en cálculo mental. Un estudio en la formación de maestros. *Educación Matemática*, 8 (1), 5-12.
- Consejería de Educación y Cultura del Gobierno de Extremadura (2012). *Guía de Servicios Educativos de Extremadura 2012- 2013*. Mérida.
- Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométrico relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), 35-54
- Moriena, S., & Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 83(1), 20-25.