LA CONSTRUCCIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS EN ENTORNOS DE SIGNIFICATIVIDAD PARA EL ALUMNO: EL CASO DE LA MEDIATRIZ

Cristian D. Sanes
Universidad Tecnológica Nacional (INSPT)
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, Argentina.
Cristian_sanes@live.com.ar

RESUMEN

En este trabajo presentamos una propuesta para la enseñanza de lugares geométricos, en especial el de la mediatriz, basados en entornos que otorguen mayor significatividad al aprendizaje, como lo es la geometría dinámica. Desde dos marcos didácticos específicos, como la Socioepistemología y la geometría dinámica, abordamos la problemática de un Discurso Matemático Escolar que, a nuestro entender, está en crisis, por promover una adquisición del conocimiento demasiado algorítmica, en detrimento de aquellas que fomentan la argumentación y el razonamiento por parte del alumno. Como líneas de acción tendientes a reformular dicho discurso, proponemos una secuencia de actividades con GeoGebra, en la que se busca que el alumno construya por sus propios medios el lugar geométrico de la mediatriz.

PALABRAS CLAVE: lugar geométrico, mediatriz, discurso matemático escolar, práctica social, geometría dinámica

PROBLEMÁTICA A ABORDAR

Hoy por hoy enseñamos distintos lugares geométricos dando su definición, y explicando el algoritmo que permite su construcción como una receta, la cual se debe seguir paso a paso, y que parece carecer de fundamentos. El alumno empieza a considerar al lugar geométrico como el algoritmo de construcción en vez de cómo un conjunto de puntos del plano que cumple con cierta condición o propiedad.

Basta con preguntar en la Escuela Secundaria acerca de la mediatriz o bisectriz, y en el mejor de los casos nos repetirán memorísticamente la definición, o comenzarán a relatarnos como se construye dicho lugar.

Al cuestionar acerca del porque de cualquiera de los pasos, o variar cualquier circunstancia del estereotipo, el alumno tropieza con un obstáculo incapaz de resolver. Creemos que la razón por la cual el alumno no implementa los lugares geométricos como herramienta de resolución de problemas es la adquisición del mismo de forma *asignificada*, como mero algoritmo de construcción. Para probar esta hipótesis analizaremos algunos de los libros de textos utilizados hoy día en Educación Secundaria.

Así mismo, vale decir que la fundamentación del proceso de construcción de los lugares geométricos en entornos estáticos como lo son el papel, el lápiz, y los instrumentos de geometría requiere de una capacidad de abstracción y de razonamiento geométrico que el alumno de los primeros años de secundaria aún no posee.

Es así que las herramientas de la geometría dinámica, como las funciones de arrastre, o trazo, permiten al alumno elaborar los razonamientos pertinentes a la construcción de los lugares geométricos sin caer en profundas abstracciones. Permite además la interacción del mismo con problemas de geometría donde la resolución es una construcción, actividades que en la geometría estática de la Escuela Secundaria, cuando es dictada, son poco usuales.

Desde el marco didáctico de la socioepistemología, abordaremos la resignificación de una práctica social en la enseñanza de un contenido matemático, entendiéndose como las costumbres reinantes a la hora de explicar el caso particular de la mediatriz en la Escuela Secundaria. En especial, emplearemos el concepto de Discurso Matemático Escolar para echar luz sobre la manera en que *vive* un contenido matemático en una institución educativa y las posibilidades de reformulación de dicho discurso.

Es en este punto donde echaremos mano sobre las potencialidades que un software, en especial GeoGebra, pueden brindar a la hora de resignificar un contenido, apoyándonos para esto en las argumentaciones que nos brinda la Geometría dinámica.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

La Socioepistemología y el Discurso Matemático Escolar: La posibilidad de reformular una práctica escolar

Por lo general, desde la didáctica, dimensionamos la educación matemática desde tres componentes básicas, las que permiten un análisis sistémico en toda investigación: La componente epistemológica, la componente didáctica y la componente cognitiva.

Podríamos establecer que, en líneas generales, las primeras corrientes de la didáctica de la matemática sentaron sus bases sobre dichas componentes.

Sin embargo, este abordaje nos brinda un conocimiento matemático despersonalizado, atemporal, y hasta podríamos decir, impoluto. En dicho contenido no se evidencian los vaivenes de su producción, ni los esfuerzos de su formalización. Pero es allí donde precisamente encontramos los elementos que caracterizan didácticamente a los contenidos, los que lo determinan en su esencia actual, y quizás los que encierran la respuesta a muchas dificultades de nuestros alumnos.

Es fundamental el análisis del surgimiento social del conocimiento matemático, sus procesos de transformación y reacomodación, y su validación e importancia a lo largo de la historia. Esa dimensión del objeto matemático como objeto de construcción social es la que nos brinda una mirada diferente del contenido respecto de la institución educativa, nos explicita que el mismo se encuentra inmerso en ella con características bien específicas, muchas veces diferentes a las que lo definen como obra matemática.

Dentro de la Matemática Educativa, la Teoría Socioepistemológica es quien completa la terna citada al inicio del presente párrafo. Es decir, esta corriente incorpora la componente social a la investigación en didáctica de la matemática (Reyes, 2011).

Esta corriente nos brindará, entre otros importantísimos conceptos, el de *práctica social*. Caracterizando a la práctica social, Crespo Crespo afirma “La noción de práctica social, medular en la socioepistemología, se refiere a las acciones intencionales de los grupos humanos para transformar la realidad social y material. “ (Crespo Crespo, 2007, p.28)

Desde esta postura, se entiende que el concepto de *práctica social* es fundamental en la construcción social del conocimiento matemática. Ella es su principal herramienta, y sobre todo, caracteriza fundamental su fortaleza didáctica, tal como lo citamos en palabras de Crespo Crespo, en tanto *transforma la realidad social y material* del medio que rodea al sujeto.

La práctica social define en muchos sentidos al conocimiento matemático en sí. Basta una breve revisión de la historia de la matemática y de la ciencia para comprender que los intereses sociales (subyugados durante muchos períodos a intereses económicos) guiaron la investigación, y por tanto los descubrimientos, en matemática. Tal es el caso de la ingeniería, entre otras muchas otras disciplinas.

Las prácticas sociales son capaces en sí mismas de describir al conocimientos matemático es su dimensión más completa y más compleja, permiten dilucidar las iniciativas que impulsaron su surgimiento, así como también sus motivos. Para nuestro trabajo, prescindiremos de la *dimensión* *histórica* de la práctica social, por razones de tiempo y extensión del mismo. La abordaremos en tanto describa nuestras acciones actuales dentro del aula. Por ello es interesante abordar una caracterización que Reyes realiza en su investigación en relación a la práctica social. Sus principales características son:

- *La dimensión Normativa: En tanto que son las generadoras del conocimiento.*
- *La dimensión Identitaria: En tanto determina la identidad que caracteriza a un grupo (por ejemplo, nos caracteriza la forma de aborda cierto contenido)*
- *La dimensión reflexiva-discursiva: Nos brinda las argumentaciones que nos permiten validar nuestra acción.*
- *La dimensión pragmática: Rige la acción.*

(Reyes, 2011)

Traemos al presente trabajo esta caracterización fundamental de la práctica social, que haría emerger el conocimiento matemático, porque creemos que son las que se debe tratar de generar en el aula. Toda actividad que involucre procesos de argumentación, que además incorpore una acción fundamental por parte del alumno y, si aún más, queda plasmado en ella la identidad del mismo (o del grupo en sí), otorgará significatividad al contenido que deseamos enseñar.

A los fines de la presente investigación, cabe destacar que las dimensiones citadas caracterizan a la práctica social con un dinamismo fundamental. De ninguna forma las constituye en estática, perpetuas o Atemporales. Los escenarios históricos, geográficos, culturales, económicos y muchos otros más determinaran ciertas prácticas sociales, y estas a su vez el conocimiento matemático.

Esta construcción social de conocimiento matemático no es la que llega a nuestras aulas. Todo lo contrario, presentamos un conocimiento despersonificado, atemporal y hasta *acabado*. En nuestras clases no se evidencian las conflictividades que originaron ciertos objetos matemáticos, o hasta las polémicas que suscitaron. Presentamos a los mismos como naturales, evidentes, y el alumno los dimensiona como de un surgimiento espontáneo.

De acuerdo a Chevallard (citado en Reyes, 2011), nuestra comunidad educativa basa su sistema en el concepto de Trasposición didáctica. El mismo se refiere a las modificaciones adaptativas que aplicamos al saber matemático para poder presentarlo en las aulas. Es así que el saber sabio se transforma en el saber enseñado. Ahora de ninguna manera esta trasposición del contenido implica privar al saber matemático de su dimensión social. Precisamente allí es donde creemos que se encuentra su mayor valor didáctico.

Desde la socioepistemología se aborda la forma en la que un objeto matemático *vive* en las instituciones educativas bajo el concepto del Discurso Matemático Escolar: "En su intento por difundir estos saberes, se forman discursos que facilitan la comunicación en matemáticas y favorecen la formación de consensos. Llamamos a estos discursos con el término genérico de discurso matemático escolar" (Cantoral, 2001, p.70)

El Discurso Matemático Escolar norma la práctica matemática en las instituciones educativas. Es el resultado del interés de distinto actores institucionales: La sociedad, autoridades gubernamentales, Académicos, Organismos internacionales, etc. Es la forma de ver la matemática en las escuelas, y además rige, de manera explícita e implícita (sobre todo implícita), la relación Saber-Alumno-Docente-Contexto. Por lo tanto, podríamos establecerlo como una decisión intencional, de características intelectuales e institucionales, que rige la praxis educativa en torno a un objeto matemático.

Desde nuestra investigación, detectamos un Discurso Matemático Escolar reinante en torno a la enseñanza de la geometría. Es de destacar que la geometría en el sistema educativo argentino tuvo durante mucho tiempo un papel relevante, en tanto era presentada al alumno desde su visión de Sistema Axiomático. Era la oportunidad de entrenar al mismo en dos ejes fundamentales: Las destrezas demostrativas, y las construcciones geométricas.

Ahora nunca se abordaron dichos ejes desde una reconstrucción histórica de las prácticas sociales que los determinaron, ni tampoco desde una actitud constructiva por parte del alumno, sino mas bien en un proceso mecanicista de adquisición de contenidos sin *significación*. Basta observar el tratamiento que recibe la mediatriz en (Repetto, Linskens, Fesquet, 1940) "Definición: Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al segmento en su punto medio" (Repetto et al, 1940, p. 136)

Luego en el texto sigue un análisis en el que se realiza una comprobación empírica de que si elegimos puntos de la mediatriz y medimos las distancias a los extremos del segmento, las mismas coinciden. Como consecuencia de dicho análisis se enuncia el siguiente teorema, y se da su correspondiente demostración: "Teorema: Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo y todo punto que equidista de los extremos de un segmento pertenece a su mediatriz" (Repetto et al, 1940, p. 137)

Vale aclarar que la demostración no es constructiva, emplea argumentos de igualdad de triángulos. A continuación, y como inmediata conclusión del teorema demostrado, postula "Teorema: La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos" (Repetto et al, 1940, p. 139)

Finalmente, dedica un apartado a la explicación de la construcción de la mediatriz con regla y compas. En ella, nuevamente se presentan argumentaciones que involucran conceptos de circunferencia, igualdad de triángulos, etc. Se observa claramente una adquisición del contenido desde una formalidad extrema, con una actitud pasiva por parte del alumno, en un entorno absolutamente estático.

Cabe destacar que se introdujo mediatriz desde lo que sería un corolario de su definición por lugar geométrico, es decir, como la recta perpendicular a un segmento que lo divide en su punto medio.

Creemos que es más provechosa la introducción por su definición de lugar geométrico, y abordar como propiedad el hecho de la división del segmento en su punto medio en forma perpendicular, dado que permite resolver problemas constructivos como los de intersección de lugares geométricos. Desde este punto de vista es que consideramos que el alumno ha adquirido el contenido matemático mediatriz en forma *asignificada*.

Posteriormente, con reiteradas reformas educativas que vapulearon al sistema educativo, la geometría cayó en un proceso de *algebrización* que casi la ha hecho desaparecer de la educación secundaria (y en muchos casos de la educación superior). Hoy tenemos una enseñanza de la geometría donde las demostraciones han desaparecido absolutamente, pero donde no se ha incorporado un proceso donde el alumno argumente y establezca conjetura por sí mismo. Las construcciones geométricas también se encuentran en vía de extinción, y las que subsisten son por un proceso mecanicista, sin sentido, que el alumno repite prototípicamente sin comprender.

Cuando enseñamos geometría (si es que lo hacemos) no tardamos en caer en los ejercicios algebraicos de hallazgo de una incógnita, o en procesos aritméticos de medición. Aquí analizaremos el texto de Educación Secundaria actual de (Abálsamo, Berio, Kotowski, Liberto, Mastucci, Prandini, Quirós y Vásquez, 2012).

Observemos la definición de mediatriz presente en él: “La mediatriz de un segmento (Mz) es la recta perpendicular que pasa por su punto medio. Los puntos de la mediatriz equidistan, es decir, están a la misma distancia de los extremos del segmento” (Abálsamo et al, 2012, p.95)

A continuación, junto a una figura de análisis, se enumeran los pasos a seguir en la construcción de la mediatriz, que transcribiremos en forma textual, pues consideramos que otorga fuerza a nuestra tesis de la visión algorítmica de las construcciones geométricas en Educación Secundaria:

1. *Se apoya el compás en uno de los extremos del segmento con una abertura mayor que la mitad del segmento y se traza una circunferencia.*
2. *Se repite el procedimiento apoyando en el otro extremo del segmento, con la misma abertura.*
3. *Se dibuja la recta que determinan los dos puntos de intersección de las circunferencias.*

(Abálsamo et al, 2012, p.95)

No se observa ningún tipo de argumentación en torno a validar los pasos que configuran la construcción del lugar geométrico, y mucho menos el tratamiento de este último concepto. Precisamente, si bien se ha eliminado la demostración formal de la enseñanza de la geometría en el nivel Secundaria, pues el alumno no se encontraba preparado para tal nivel de formalidad, no se ha incorporado ningún proceso de validación de propiedades o construcciones geométricas.

La adquisición del concepto continúa siendo tan *asignificada* como en el caso anterior, o peor aún, pues se ha perdido algunas comprobaciones empíricas de medición presentes en el texto analizado anteriormente. Por último los ejercicios propuestos para el tema denotan una visión del contenido absolutamente mecanicista, pues se trata simplemente de construir la mediatriz de dos segmentos dados (en sí ya construidos, es decir, no presentados por su medida). Creemos que este es un Discurso Matemático Escolar en crisis, incapaz de promover en el alumno la construcción de conocimientos geométricos con significación.

De acuerdo a las características que enunciamos del Discurso Matemático Escolar, podemos dimensionarlo como una práctica social, y por tanto dinámica. En especial, la consideramos una de las prácticas sociales que mayor importancia reviste desde una visión didáctica, pues encierra el potencial de cambio.

El Discurso Matemático Escolar constituye por ende una construcción social, influenciada por distinto factores, pero principalmente susceptible de ser modificada. Reformular el Discurso Matemático Escolar desde una visión de la socioepistemología implica favorecer una construcción social del conocimiento matemático.

El objetivo de la presente investigación gira en torno a dicho eje: La reformulación del Discurso Matemático Escolar de la mediatriz en la Educación secundaria para favorecer la construcción de lugares geométricos por parte del alumno en entornos de significación.

Cuando proponemos entornos de significación nos referimos a actividades donde el alumno adquiera el concepto de lugar geométrico no de forma mecanicista sino por elaboración activa, en constante confrontación con las propiedades que deben cumplir los puntos para formar parte de dicho lugar. Una herramienta fundamental para introducir este cambio en el discurso reinante para la geometría son los software computacionales.

La geometría dinámica brinda la posibilidad de que el alumno elabore argumentaciones y establezca conjeturas a través de las funciones de arrastre, trazo, y otras más. El lápiz y el papel, como entornos estáticos, obligan al alumno a abstracciones muy elevadas que, en los años a los que va dirigidos la presente investigación, aún no poseen la capacidad de forjarlas. En lo que sigue analizaremos desde la geometría dinámica las potencialidades que el software GeoGebra brinda en la reformulación del lugar geométrico mediatriz.

La Geometría dinámica como potencial herramienta en la reformulación del Discurso matemático Escolar

Al finalizar el apartado anterior concluimos la necesidad de reformular el Discurso Matemático Escolar actual de la geometría (en especial el de los lugares geométricos), con el objetivo de que el alumno adquiera conocimientos geométricos en entornos de significatividad. A tal fin proponemos la utilización del software GeoGebra, y presentamos una posible secuencia didáctica que más adelante analizaremos para la resignificación de la mediatriz.

Cabe preguntarse entonces, ¿Por qué la utilización de un software computacional en la enseñanza de la geometría? ¿Qué ventajas puede aportar y qué dificultades puede conllevar? ¿Qué aportes realiza en la construcción de lugares geométricos por parte del alumno, no en forma estereotipada, sino más bien por descubrimiento de propiedades y relaciones?. Para dar respuesta a tales cuestionamientos abordaremos argumentaciones presentes en la Geometría Dinámica.

Como ya anticipamos, la utilización del papel y el lápiz en la identificación de propiedades presentes en las construcciones geométricas obliga al alumno a un poder de abstracción y formalización muy elevado, que en los cursos a los que va dirigida la propuesta aún no se ha desarrollado.

La definición de lugares geométricos, y sobre todo la visualización del conjunto de puntos que los conforman, requieren la capacidad de abstraer las propiedades que deben cumplir dichos puntos, y confrontar cuáles son *todos* los que la cumplen. Esa universalidad buscada implica una actitud del alumno, la que postulamos se centraría en tres ejes:

1. La identificación, a partir del enunciado del lugar geométrico, de las propiedades que deben cumplir los puntos del plano para pertenecer a él.

2. El análisis particular de varios casos en los que se verifique dichas propiedades.

3. La extensión de dichos casos particulares a todos los que la cumplen, y por ende la identificación del lugar geométrico, en términos de alguna *figura geométrica.*

Sin lugar a dudas, en el entorno estático del papel y lápiz la actitud pretendida por parte del alumno implicaría enormes esfuerzos de generalidad, que solo podría ser alcanzado por el estudio repetitivo de casos particulares, lo que inmediatamente requeriría de construcciones extremadamente elaboradas.

Alternativamente a esto, se podría sugerir el estudio de la propiedad con la que debe cumplir un punto para integrar un lugar geométrico, y el análisis abstracto de cuáles serían los puntos del plano que cumplirían tal condición, y posteriormente la formulación de la imagen *mental* de la figura geométrica que determinan. Tal competencia muchas veces es difícil de conseguir hasta en los primeros años del nivel superior, pues implica unos de los razonamientos matemáticos de más alto grado.

Para subsanar estas dificultades, que sin duda son la principal excusa para la presentación de ciertos lugares geométricos, como la mediatriz, en forma algorítmica, y por tanto asignificada, proponemos la utilización de software de geometría dinámica. Resumimos las principales diferencias en la aproximación a la geometría usando estas herramientas en contraposición con las del papel y el lápiz en palabras de Larios Osorio:

- *" La posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macro"*
- *"La posibilidad de construir lugares geométricos"*
- *"Cómo característica más relevante: 'La transformación continua en tiempo real llamada comúnmente arrastre" (Goldenberg y Cuoco, 1998, p.351)*

(Larios Osorio, 2006, pp. 366-367)

Esto implica directamente que el alumno en el estudio repetido de casos no necesariamente deberá hacer muchas construcciones (lo que configuraría un entorno de trabajo bastante complicado), sino que bastará con que construya una, arme lo que se denomina una *macro*[1], y construya los demás casos aplicando el comando construido. Al mismo tiempo, hay lugares geométricos que los tendrá que construir (en sus dos dimensiones: Geométrica y didácticamente) por primera vez, pero luego tendrá presente el comando en la barra de herramientas del programa.

Por último, coincidiendo absolutamente con Osorio, la función de arrastre define el mayor potencial del software, aunque con ciertas precauciones sobre él que más adelante analizaremos. La posibilidad de que el alumno modifique la construcción original conservándose invariantes las propiedades geométricas con las que fue elaborada, brinda la posibilidad de que establezca conjeturas y descubra propiedades sobre el objeto geométrico.

Podemos caracterizar al arrastre desde tres características fundamentales. El arrastre como ***retroalimentación*** de acciones que establece el usuario para poseer un dominio sobre la construcción. El arrastre como ***mediador entre la figura y el dibujo***, permitiendo al usuario distinguir entre construcciones realizadas bajo condiciones geométricas o por aspecto visual.

El arrastre como ***modo de examen o búsqueda***, que permite al usuario la búsqueda de invariantes geométricos en sus construcciones, y por ende la formulación de propiedades y conjeturas. (Olivero, citado por Larios Osorio, 2006, p. 367). Como se puede observar, el arrastre brinda una alternativa que rompe con la rigidez presente en el papel y el lápiz. Caracterizaremos este concepto de rigidez geométrica en término propuestos por Larios Osorio:

> La rigidez geométrica es un fenómeno relacionado con la visualización de las figuras geométricas. Ocurre cuando hay una incapacidad del individuo para manejar mentalmente una figura mentalmente una figura geométrica al no estar en ciertas posiciones ´estándares´ o no pueden imaginarla cuando se mueve (bajo una traslación) o cambia su forma su forma; es decir, cuando sus lados cambian de posición o sus ángulos se modifican. (Larios, 2006, p. 379)

Precisamente, esta rigidez estará presente cuando en el entorno del lápiz y el papel nuestros alumnos sean incapaces de visualizar el cambio de radio de circunferencia, en la construcción de la mediatriz como lugar geométrico, y por tanto la generación de todos los puntos que resulten de la intersección de dichas circunferencias. La ausencia de dicho dinamismo también les generara dificultades en el análisis de cuando las circunferencias no se cortaran, y por lo tanto no generarán puntos.

---

[1] Llamamos macro, en el contexto de un software de Geometría Dinámica, a una herramienta posible de construir dentro del programa en la que se definen los elementos de entrada, los elementos de salida, el nombre de la construcción, y se genera un comando. Al accionar dicho comando sobre los elementos de entrada postulados, se obtienen los elementos de salida definidos.

Ahora, la rigidez no se encuentra únicamente en el lápiz y el papel. La función de arrastre también implica en muchas situaciones rigidez geométrica, Larios Osorio (2003) la identifica en el *arrastre inicio-fin*. Se refiere a la visualización que realiza el alumno del objeto inicial y final del arrastre, perdiéndose el continuo de objetos intermedios.

Es decir, cuando el alumno varié el radio de la circunferencia que inicialmente ha construido, verá solo la original, y la última posición que ha obtenido. No habrá detectado el conjunto de circunferencias intermedias, fundamentales en la identificación del lugar geométrico, pues están determinando el conjunto de puntos que lo determinan.

Como herramienta de la geometría dinámica que brinda una solución a tal dificultad, proponemos la función de ***trazo***[2]**.** Tal función permite identificar con claridad todas las posiciones intermedias que tendrá un objeto en el arrastre, desde el original hasta el último. En nuestro trabajo cobra una relevancia fundamental, porque permite al alumno un registro de todos los puntos que determinan un lugar geométrico, y por ende la figura geométrica que determinan.

La función trazo es una característica propia de la geometría dinámica, imposible de incorporar en el entorno del marco y el papel. Creemos que es una función de la geometría dinámica con un potencial aún no explotado. En combinación con la función arrastre determinan un dinamismo en el software que logra romper con la rigidez geométrica, aún presente en el arrastre inicio-fin.

Como hemos visto, el software de geometría dinámica brinda la oportunidad de reformular un discurso escolar basado en la dimensión estática del papel y el lápiz. Creemos que las construcciones geométricas, en vía de extinción en nuestra actual educación secundaria, pueden revitalizarse con tal herramienta. Además, incorpora la posibilidad de formular y validar conjeturas, que pueden ocupar el espacio vacío dejado por las demostraciones geométricas formales que reinaban en la antigua enseñanza de la geometría.

A pesar de esto, cuestiones propias de la visualización del alumno, como la rigidez geométrica, no son solucionadas por la geometría dinámica, y hasta le otorgan nuevos niveles de complejidad. Como todo, constituye una herramienta más, con sus ventajas y desventajas. Requiere de un profundo análisis por parte del docente para evitar reemplazar las complicaciones del entorno estático del lápiz y el papel por las del entorno dinámico del software.

Además, una herramienta de ninguna forma elimina la otra, sino que la complementa. Las construcciones en lápiz y papel aportan valiosas experiencias de motricidad y autonomía por parte del alumno, que no deben desperdiciarse.

---

[2] La función de trazo se activa sobre un objeto, generando que al mover el objeto este pinte de un color determinado la ruta que está siguiendo.

A continuación presentamos una secuencia de actividades tendiente a reformular el Discurso Matemático Escolar de la mediatriz en la Escuela Secundaria. Ella se basa en las argumentaciones realizadas en el presente marco teórico y metodológico.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES

Descripción de la propuesta

La siguiente es una secuencia de actividades destinada a *resignificar* el concepto de mediatriz como lugar geométrico. Se dirige a alumnos de 1° Año de la Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires.

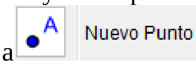
Al finalizar la propuesta se espera que el alumno:

- Dimensione la mediatriz como lugar geométrico y pueda justificar cada uno de los pasos intervinientes en su construcción.
- Interprete y manipule los puntos que integran un lugar geométrico, así como también la intersección de dichos lugares como solución a distintos problemas.
- Emplee la mediatriz en la resolución de problemas geométricos, sobre todo en los que la resolución de la situación sea una construcción.
- Emplee un software computacional en la resolución de problemas, así como también en la modelización de distintas situaciones.
- Argumente, valide, formule y conjeture en geometría apoyándose en la interacción con la construcción que el software le brinda.
- Enriquezca sus construcciones en papel y lápiz con las conclusiones obtenidas en la utilización del software.

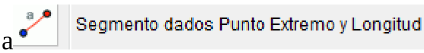
SECUENCIA DIDÁCTICA: CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO

I) Construcción del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo O.

1) Abra Geogrebra. De ser necesario, quite los ejes (click derecho sobre la pantalla, destildar *ejes*)

2) Construya un punto O. Para ello, seleccione , y al desplegarse las opciones elija 

. Para colocarle el nombre tecleé O cuando termine de construirlo.

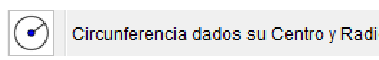
3) Construya un punto que se encuentre a dos unidades de distancia del punto O. Para ello, seleccione , y al desplegarse el menú elija 

. Al punto extremo del segmento obtenido llámelo A (click derecho sobre el punto, tildar *muestra rotulo*)

4) Haga click derecho sobre el punto A, seleccione *activar rastro.*

5) Mueva el punto A (pintando lo más que se pueda)

6) Conteste:
   a) ¿Qué figura geométrica se formó?
   b) ¿Qué propiedades cumple los puntos que se encuentran en dicha figura? Justifique.
   c) Enuncie el lugar geométrico que se ha determinado.

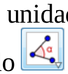
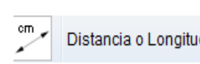
7) Con la opción , seleccionando 

, construya la circunferencia de centro O y radio 2 unidades. ¿Obtuvo el lugar geométrico que contesto en 6) a)?

8) Construya el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a una distancia de 7 unidades de O.

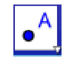
II) Construcción de un punto que diste cierto valor de dos puntos fijos. (intersección de lugares geométricos)

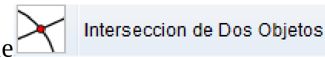
1) Construya dos puntos O y P. (aquí el docente debería indicar que los puntos no se hallen demasiado alejados)

2) Construya un punto que diste 5 unidades de O. Llámelo A. Determine a qué distancia se encuentra A de P, seleccionando  y al desplegarse las opciones elija 

3) ¿Dónde ubicaría el punto construido para que se halle a una distancia de 5 unidades también de P? ¿Cómo lo obtuvo?

4) Construya el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a una distancia de 5 unidades de O. Luego construya el de todos los puntos que se encuentran a una distancia de 5 unidades de P. ¿Se intersecan? ¿Dónde? ¿Con qué punto coincide?

5) Marque la intersección obtenida en 4) empleando la opción 

y seleccione 

. ¿Cuántos puntos obtuvo? ¿Qué propiedad poseen los puntos hallados?

6) Determine los puntos que se encuentran a 7 unidades de O y P. ¿Cuántos son?

7) ¿Sucederá en algún caso que los lugares no se corten entre sí? ¿Cuáles son dichos casos?

8) ¿Sucederá en algún caso que los lugares se corten en un único punto? ¿Cuáles son dichos casos?

9) ¿Cuáles serán los requisitos necesarios para qué los lugares se corten en un único punto? ¿y en ninguno? ¿y en dos?

10) Describa como se construye el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a una cierta distancia de dos puntos fijos.

III) Construcción de la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos.

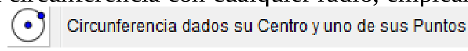
1) Construya dos puntos O y P.

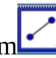
2) Trace los puntos que se encuentran a cinco unidades de dichos puntos.

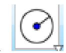
3) Trace los puntos que se encuentren a seis unidades de dichos puntos.

4) Trace los puntos que se encuentren a siete unidades de dichos puntos.

5) ¿Cómo se encuentran todos los puntos hallados en los puntos 1, 2, 3 y 4?

6) Con centro en O trace una circunferencia con cualquier radio, empleando la opción , y seleccionando en ella 

. Ahora trace el segmento que une O con el punto de la circunferencia construida, empleando el ítem . Con clic derecho sobre el segmento seleccione *active rotulo*.

7) Con centro en P, construya una circunferencia con el ítem , y cuando solicita el radio introduzca el nombre del segmento del punto 5. Se construirá una circunferencia con el mismo radio que la anterior. Busque los puntos de intersección entre ambas ¿A qué distancia de los puntos O y P se hallan?

8) Con clic derecho sobre cada uno de los puntos de intersección del punto 6, active rastro y desplace el punto sobre la primera circunferencia que construyo. ¿Qué figura geométrica queda determinada?

9) En base a lo construido, concluya cual es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos dados, y explique cómo se construye.

IV) Redefiniendo la práctica social del algoritmo de la construcción de la mediatriz con sentido para el alumno: (aquí se quiere que el alumno logre justificar cada uno de los pasos que realiza en la construcción de la mediatriz con papel y lápiz)

1) Construya dos puntos O y P.

2) Construya el lugar geométrico de los puntos que equidistan de O y P.

3) Trace el segmento OP.

4) Marque la intersección del lugar geométrico construido en 2 con el segmento OP. Llame a dicha intersección M.

5) Tome la distancia de M a O y de M a P. ¿Qué se observa? ¿Qué ángulo forman el lugar geométrico y el segmento OP?

6) ¿Cómo se denomina lo que ha construido?

En base a lo trabajado conteste:

1) *¿Qué propiedad cumplen cada uno de los puntos de la mediatriz de un segmento?*

2) *Cuando en la construcción con regla y compas de la bisectriz trazamos arcos con el compás ¿Qué estamos trazando? ¿Por qué lo hacemos?*

3) *¿Por qué debemos tomar una medida mayor a la mitad del segmento con el compás?*

NOTA: La idea es que las actividades I y II se logren trabajar en una clase de 1 hora. El III, en otra case de 1 hora, al igual que el IV y las preguntas de cierre.

CONCLUSIONES

En el actual Discurso Matemático Escolar de la geometría de la Educación Secundaria hemos detectado una falencia, fruto del análisis de dos textos escolares, que refieren distintas etapas históricas en la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria de nuestro país. Con sustanciales diferencias entre ellos, ambos reflejan una adquisición del conocimiento geométrico de forma algorítmica y *asignificada*.

Especialmente, hemos estudiado el caso de la mediatriz como lugar geométrico y su enseñanza. Es aquí donde hemos identificado, como práctica social reinante en la enseñanza del contenido, un costumbrismo típico: El de la enseñanza de la mediatriz como la recta perpendicular a un segmento que lo divide en dos partes iguales.

Al mismo tiempo, la presentación del contenido se realiza con el dictado de una receta secuenciada, cuyos pasos son estandarizados, y el alumno repite, pero sin poder justificar ni variar dicha estructura. Es en dicho sentido que postulamos que el alumno adquiere el concepto de mediatriz en forma *asignificada*.

Desde la Socioepistemología dimensionamos a tal Discurso Matemático Escolar como una práctica social, y como tal, pasible de reformulación. Propusimos a tal fin herramientas de la geometría dinámica, tanto desde su marco teórico, como de los software´s computacionales en los que se aplica.

Como enfoques en la reformulación del discurso descripto, proponemos una actitud activa por parte del alumno, en la que se intenta romper con la dimensión estática del papel y el lápiz.

Describimos las potencialidades didácticas que brindan las funciones de *arrastre*, y sobre todo, el *trazo* en la elaboración de conjeturas y validación (empírica) de propiedades, como elementos fundamentales de la geometría dinámica utilizados en la formulación de una secuencia didáctica.

La secuencia didáctica presentada, dirigida al primer año de la Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires, se apoya en la utilización del software de geometría dinámica GeoGebra. En ella, el alumno redefine su concepción de distintos lugares geométricos, que conducen a la formulación de la mediatriz como lugar geométrico. A partir de aquí, se pretende que el alumno concluya las propiedades con las que hoy día se presenta la mediatriz.

Por último, es de destacar que la presente propuesta se basa en las argumentaciones realizadas desde dos marcos teóricos diferentes: la Socioepistemología y la Geometría Dinámica. Sin embargo, la aplicabilidad en un curso de secundaria depende de un análisis a priori basado en las características didácticas del grupo, y debe completarse con un análisis a posteriori de los resultados obtenidos en la puesta en práctica de la secuencia. El presente trabajo pretende el análisis de un Discurso Matemático Escolar en especial, y las posibilidades de reformularlo.

Los esfuerzos de los actuales educadores en matemática deben estar dirigidos a revalorizar la enseñanza de la geometría, disciplina matemática que a pesar de lo fructífero de las argumentaciones que involucra, tiende a desaparecer en nuestra práctica.

Una creciente *algebrización* de la geometría tiene por consecuencia una utilización cada vez menor de construcciones geométricas en la resolución de problemas. Es fundamental rescatar las riquezas didácticas de las conjeturas geométricas, que el alumno, en el marco de la geometría dinámica, puede generar y validar.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Abálsamo, B., Kotowski, L., Mastucci, S., Prandini, G., Quirós, N. y Vásquez, P. (2012). *Matemática I.* Activados. Buenos Aires: Puerto de Palos.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del Discurso Matemático Escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, 70-81. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México

Larios Osorio, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9 (3)*, 361-382.

Lázaro Alvarez, N. (2012). Estrategia metodológica para potenciar el uso del software elementos matemáticos en la secundaria básica. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 1367-1377. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Repetto, C., Linskens, M. Fesquet, H. (1940). *Geometría I. Matemática Moderna*. Buenos Aires: Kapeluz.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de las factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Salinas Herrera, J. (2011). Utilización de la función de arrastre del software Cabri-Géomètre para el desarrollo del pensamiento geométrico en alumnos de bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 1124-1132. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.