# ¿PARA QUÉ SE DEMUESTRA EN MATEMÁTICA? CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA DE UN INSTITUTO DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Gustavo Franco Carzolio, Verónica Molfino Vigo
gfrancoc@gmail.com , veromolfino@gmail.com
Instituto de Profesores “Artigas” — Montevideo, Uruguay

## RESUMEN

En este artículo se presentan algunos resultados obtenidos en una investigación realizada con estudiantes del profesorado de matemática del Instituto de Profesores “Artigas” (Montevideo, Uruguay), sobre sus concepciones en torno a las funciones de la demostración. El estudio revela que los estudiantes tienen concepciones muy variadas con respecto a las mismas: algunas coinciden con las descritas por de Villiers (1993) pero también presentan otras diferentes; lo cual da cuenta, no solo de sus concepciones relativas a la demostración, sino también de cómo esta se presenta en la clase de matemática.

**Palabras clave:** estudiantes de profesorado, matemática, concepciones, demostración, funciones de la demostración

## INTRODUCCIÓN

Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática recomiendan la inclusión de la demostración en el currículo de matemática de Enseñanza Media —e incluso antes—, como un eje transversal que intervenga en el tratamiento de los distintos temas de los programas (Dreyfus, 2000; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000):

> El razonamiento y la prueba no pueden simplemente ser enseñados en una única unidad sobre lógica, por ejemplo, o “demostrando” en geometría. […] El razonamiento y la prueba deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática de los estudiantes, desde el preescolar hasta el bachillerato [Traducción a cargo de los autores] (NCTM, 2000, p. 56).

Si bien muchos profesores son conocedores de recomendaciones didácticas como las anteriores, diferentes trabajos de investigación (Knuth, 2002; Jones, 1997) reportan, por un lado, que estos poseen concepciones limitadas sobre la demostración y, por otro, que tienen dificultades para implementar prácticas de enseñanza que atiendan dichas recomendaciones.

Frente a esta problemática, como forma de introducir el debate y la reflexión en el contexto educativo uruguayo, llevamos a cabo una investigación cuyo objetivo fue identificar y analizar las concepciones de estudiantes de profesorado de matemática en torno a la demostración (Franco, 2010).

## ASPECTOS TEÓRICOS

Para iniciar la identificación y el análisis de las concepciones sobre las funciones de la demostración en matemática de los estudiantes, hemos utilizado la categorización que realiza de Villiers (1993). Este autor distingue cinco funciones de la demostración (concernientes al quehacer de los matemáticos profesionales):

1) *verificación/convicción*: esta es la función que tradicionalmente se le ha asignado a la demostración; pero la convicción, señala el autor siguiendo a Bell (1976), surge a menudo por medios distintos.

Por otro lado, según de Villiers (1993), los profesores de matemática, casi sin excepciones, consideran que la demostración brinda garantías absolutas acerca de la validez de una proposición. Parecen sostener la idea naíf, descrita por Davis y Hersch (1986), acerca de que detrás de cada demostración hay una secuencia de transformaciones absolutamente comprensibles e irrefutables desde la hipótesis a la tesis, que garantizan la validez de la proposición.

2) *explicación*: de Villiers señala que se puede obtener un alto grado de confianza acerca de la validez de una proposición por verificación cuasi-empírica, pero que esto no permite obtener el sentido psicológicamente satisfactorio de iluminación, es decir, no permite percibir desde dentro cómo a partir de resultados familiares se puede llegar a la tesis. Señala que para la mayoría de los matemáticos es probablemente más importante el aspecto aclaratorio/explicativo de la demostración que el aspecto de verificación.

3) *sistematización*: según esta función, la demostración tiene por objetivo organizar lógicamente un conjunto de enunciados independientes, que de antemano se sabe que son verdaderos, en un todo coherente y unificado. El autor señala que es incorrecto decir en el aula, ante proposiciones que son evidentes por sí mismas —como las que aparecen en la introducción de la geometría euclidiana—, que la demostración se realiza para asegurar que la proposición es verdadera, ya que en esos casos los matemáticos están más preocupados por la organización dentro de un sistema deductivo que por la verificación.

4) *comunicación*: señala de Villiers (1993) que la demostración es una manera única de comunicar resultados matemáticos entre profesionales, entre profesores y alumnos y entre los propios alumnos. La demostración como forma de interacción social permite la negociación subjetiva, no solo del significado de los conceptos concernidos en la demostración, sino también, y de forma implícita, de los criterios para aceptar una demostración como válida.

5) *descubrimiento*: de Villiers sostiene que en la historia de la matemática existen numerosos ejemplos de descubrimientos realizados en forma puramente deductiva (por ejemplo las geometrías no-euclidianas).

## PRECISIONES SOBRE LOS TÉRMINOS CONCEPCIÓN, DEMOSTRACIÓN Y FUNCIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN

Coincidimos con Sastre, Rey y Boubée (2008), en que:

> …las *creencias* son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y

> actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo.
>
> Las *concepciones*, en cambio, son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan… (pp. 386-387)

Optamos por la definición anterior de *concepción* debido a que nuestro interés está centrado en esos *organizadores implícitos de los conceptos* que los estudiantes han generado en el transcurso de su vida escolar en torno a las funciones de la demostración, que son menos o más elaborados, que se fundamentan menos o más en la racionalidad, los sentimientos y las experiencias dependiendo de cada estudiante, y que simultáneamente no excluyen la eventual presencia de conocimiento específico sobre el tema.

Por otra parte, Balacheff (2000) distingue entre los conceptos de *prueba* y *demostración*: una prueba es una explicación que es aceptada por una comunidad en un momento determinado, y llama demostración a un tipo particular de prueba (que es la predominante en matemática), que consiste en una serie de enunciados que siguen un conjunto de reglas bien definidas. Como nuestro propósito es considerar a la demostración en un sentido amplio, para definirla hemos tomado como referencia la definición que Balacheff (Íbid) da de prueba. En este estudio denominamos *demostración* al discurso que realiza un individuo para establecer y garantizar la validez de una proposición, y que tiene un carácter social en cuanto debe ser aceptada por una cierta comunidad —que eventualmente puede ser la de la clase de matemática— en un momento determinado.

Por último, llamaremos *función de la demostración* al propósito o a la utilidad que tiene la demostración para los miembros de una cierta comunidad. La función de la demostración responde básicamente a la pregunta: ¿Para qué se demuestra en matemática?

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores de *concepción*, *demostración* y *función de la demostración*, cuando hablamos de *las concepciones de los estudiantes sobre las funciones de la demostración*, estamos haciendo referencia a los organizadores implícitos de los conceptos que poseen los estudiantes en torno al propósito o la utilidad que tiene el discurso que realiza un individuo para establecer o garantizar la validez de una proposición.

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para alcanzar el objetivo de esta investigación se aplicó simultáneamente a cuatro grupos de estudiantes —cada uno de ellos correspondiente a uno de los cuatro años de la carrera— un cuestionario constituido por ocho preguntas. Posteriormente se realizaron entrevistas no estructuradas a tres estudiantes —las que fueron grabadas en audio— debido a que no nos quedaba claro en algunas de sus respuestas cuál era la función de la demostración que se manifestaba. El primero de estos grupos estuvo integrado por veintisiete estudiantes de un curso de primer año, el segundo por treinta y siete estudiantes de un curso de segundo año, el tercero por diecinueve de un curso de tercero, y el último por dieciséis de un curso de cuarto año; con lo

cual participaron en este estudio noventa y nueve estudiantes. Se eligió un grupo correspondiente a cada uno de los cuatro años de la carrera para tener una visión lo más amplia posible acerca de cuáles son las concepciones sobre las funciones de la demostración de los estudiantes del profesorado de matemática del Instituto de Profesores "Artigas".
Las preguntas del cuestionario son:

(1) ¿Qué es una demostración matemática?

(2) ¿Para qué se demuestra en matemática?

(3) ¿Para qué se demuestra en la clase de matemática?

(4) Los profesores del IPA[1], ¿realizan demostraciones en el pizarrón durante la clase? En caso afirmativo, ¿para qué lo hacen?

(5) En las clases de matemática del IPA, ¿tú realizas demostraciones? ¿Para qué lo haces?

(6) Los profesores de Enseñanza Media, ¿realizan demostraciones en el pizarrón durante la clase? En caso afirmativo, ¿para qué lo hacen?

(7) ¿Recuerdas alguna demostración que te haya resultado particularmente significativa? ¿Cuál? ¿En Enseñanza Media o en el IPA? ¿Por qué?

(8) ¿Sentiste alguna vez la necesidad de demostrar algo? ¿Para qué?

En las respuestas al cuestionario, pudimos identificar una serie de propósitos o utilidades que tendría la demostración para los estudiantes, lo que nos permitió establecer una categorización de las funciones de la demostración en las concepciones de los estudiantes. Pero queremos señalar, al igual que lo hace de Villiers (1993), que si bien las funciones de la demostración pueden diferenciarse unas de otras, en casos específicos, con frecuencia, aparecen intrincadamente relacionadas. En estos casos, al analizar las respuestas de los estudiantes, consideramos la función (o las funciones) que tenía una presencia más destacada.
Se tomaron dos tipos de registro: se contabilizó por un lado la cantidad de respuestas de cada uno de los cuatro grupos, por cada una de las ocho preguntas, que evidenciaban una cierta función. Es decir, se contó, por ejemplo, la cantidad de respuestas a la pregunta (1) en las que estudiantes de primer año evidenciaban la función de verificación/convicción; de igual forma se procedió con los estudiantes de los otros años, para cada una de las preguntas y cada una de las funciones. Por otro lado, se contabilizó la cantidad de estudiantes por año que ponen de manifiesto una cierta función. Se debe tener en cuenta que el número de estudiantes de un año específico que manifiesta una determinada función, no tiene por qué coincidir con la cantidad de respuestas, correspondientes a ese mismo año, en las que se evidencia dicha función. Por ejemplo, en cuarto año son siete los estudiantes que manifiestan la función de explicación, sin embargo, en este grupo dicha función aparece en diez respuestas, debido a que tres de estos estudiantes la evidencian en dos de sus respuestas (lo que hace a un total de seis respuestas, correspondientes a tres estudiantes) y los restantes cuatro ponen de manifiesto la función de explicación en una única respuesta.
Por último, queremos señalar que hubo respuestas en las cuales no fue posible identificar ninguna función de la demostración y otras en donde se evidenciaban más de una.

[1] Instituto de Profesores "Artigas".

## ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES RELATIVAS A LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIÓN DETECTADAS EN SUS RESPUESTAS

*Respecto a las funciones consideradas a priori (de Villiers, 1993)*

*La función de verificación/convicción*

Entre las funciones señaladas por de Villiers (1993), la función de verificación/convicción es la que aparece con mayor frecuencia en las respuestas de los estudiantes. Por tal motivo, resulta interesante distinguir la frecuencia de dicha función en las respuestas a cada pregunta por separado. Descubrimos que es en las respuestas a las preguntas (1) y (2) —*¿Qué es una demostración matemática?* y *¿Para qué se demuestra en matemática?*— en donde más se manifiesta: en las respuestas a la pregunta (1), cincuenta y dos estudiantes de todos los años (52,5 %) evidencian la función de verificación/convicción y, en las respuestas a la (2), cincuenta estudiantes (50,5%). Sin embargo, en las respuestas a la (3), fueron solo quince estudiantes (15,2%), en las respuestas a la (4), seis estudiantes (6,1%), a la (5), dieciocho estudiantes (18,2%), a la (6), dos estudiantes (2,0%), a la (7), ningún estudiante y a la (8), veintisiete estudiantes (27,3%).

Entendemos que el alto porcentaje de respuestas a las dos primeras preguntas en las que se aprecia la función de verificación/convicción, se debe a que en estas preguntas se alude a la demostración en "abstracto"; es decir, la demostración no aparece relacionada ni con la clase de matemática ni con la actividad del estudiante. En cambio, en las preguntas desde la 3 a la 8, se le presentan al estudiante situaciones específicas con las que se puede sentir comprometido —en el sentido de que son situaciones que se corresponden con sus vivencias—. Sostenemos entonces que para responder a las preguntas (1) y (2), el estudiante recurre a ciertas concepciones que ha internalizado en su vida escolar pero externas a él, pertenecientes, por ejemplo, a sus profesores.

Por otro lado, según de Villiers (1993), en general los profesores de matemática tienden a considerar que la demostración es *la autoridad absoluta para establecer la validez de una conjetura*, por lo que no sorprende constatar que el estudiante manifieste mayoritariamente la función de verificación/convicción en sus respuestas a las dos primeras preguntas. Para dar respuesta a las restantes seis preguntas, el estudiante puede recurrir más naturalmente a su experiencia en relación a la demostración, lo cual le evita caer en una respuesta internalizada en forma irreflexiva que lo conduciría a la función de verificación/convicción.

Las siguientes son algunas respuestas en donde está presente la función de verificación/convicción[2]:

> E1-2: [Se demuestra] Para tener la certeza de que un enunciado, proposición, o teorema es válido. […]
>
> E2-17: [Una demostración] Es la herramienta de verificación de la que disponemos para afirmar la validez (o no) de determinada proposición.

---

[2] Con *Ex-y* nombraremos al estudiante que cursa el año *x* y al que se le ha asignado, arbitrariamente, el número *y*. De este modo, E1-2 es el estudiante de primer año al que le hemos asignado el número 2.

En las citas que realizaremos de las respuestas de los estudiantes hemos respetado la sintaxis aunque, si existían, fueron corregidas las faltas de ortografía.

*La función de explicación*

En el grupo de primero, tres estudiantes (11,1 %) evidencian la función de explicación, en los de segundo y tercero, dos (5,4 % y 10,5 % respectivamente) y en el de cuarto, siete (43,8 %). Esto nos muestra que en las respuestas de los estudiantes de cuarto año la función de explicación estuvo mucho más presente.

Las siguientes son respuestas en donde está presente la función de explicación:

> E3-11: Sí [recuerdo una demostración que me resultó significativa]. La demostración de la ecuación de la circunferencia. La vi por primera vez en el liceo y luego en el IPA. Me pareció significativa porque vi claramente cómo partiendo de la definición de circunferencia, llegamos a la ecuación, aplicando muchas propiedades.
>
> E4-8: Sí [realizo demostraciones], para entenderlo mejor y convencerme de su validez, conociendo el proceso que me llevó hasta él.

*La función de sistematización*

Identificamos la función de sistematización en las respuestas de ocho estudiantes –tres de primero (11,1 %), dos de segundo (5,4 %), dos de tercero (10,5 %) y uno de cuarto (6,3 %). La siguiente es una de las respuestas en donde se evidencia dicha función:

> E2-21: En una determinada teoría, se pretende construir de manera lógico-deductiva todas las afirmaciones que dicha teoría pretende afirmar. Así partimos de conceptos primitivos, los cuales se toman como punto de partida para la construcción de dicha teoría; y también partimos o contamos con todas las leyes lógicas y proposiciones lógicas. Así con estas herramientas se comienzan [a] demostrar teoremas. Estos teoremas, implicaciones lógicas conectadas, aseguran que esa demostración se cumple para cualquier elemento o ciertos elementos del conjunto en que se construye dicha teoría.

*La función de comunicación*

La función de comunicación estuvo presente, aunque no con mucha frecuencia –dos estudiantes de primero (7,4 %) y dos de segundo (5,4 %) ponen de manifiesto la función de comunicación, en tercero no aparece y en cuarto un solo estudiante (6,3 %) la evidencia. Las siguientes son dos de las respuestas en donde se manifiesta:

> E1-19: Al demostrar uno comparte con el resto cómo se llega a determinada verdad, y hace así más fácil y compartible la construcción y avance hacia nuevos temas.
>
> E4-2: […] [Se demuestra] Para comunicar a otros científicos matemáticos algún descubrimiento.

*La función de descubrimiento*

No pudimos detectar la función de descubrimiento en la respuesta de ningún estudiante. Consideramos que esto es debido a que no han tenido oportunidad de experimentar con esta función en las actividades en torno a la demostración que realizan, o por lo menos en las actividades que pudieron evocar a partir de las preguntas formuladas en el cuestionario.

*Respecto a las nuevas funciones de la demostración*

Al momento de analizar las respuestas de los estudiantes, la categorización realizada por de Villiers (1993) nos resultó insuficiente: ceñirnos a considerar únicamente las cinco funciones descritas por el autor en su artículo, sería desconocer una realidad bastante más rica y variada que es la que se infiere de dichas respuestas.

Dos fuertes razones nos condujeron a no desestimar las funciones aludidas por los estudiantes aunque no correspondiesen a las referidas por de Villiers (1993):

- Las cinco funciones descritas por el autor conciernen al quehacer de los matemáticos profesionales, pero de las respuestas de los estudiantes se desprende que la demostración podría tener importantes funciones que sean intrínsecas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y particularmente a los relativos a la formación de profesores de matemática.
- Nuestro estudio no tenía como propósito analizar la corrección o adecuación de las concepciones de los estudiantes a las funciones de la demostración descritas por de Villiers (1993), sino identificar y analizar cuáles son.

*La función de fundamentación*

Veamos las siguientes respuestas:

> E1-17: [Una demostración] Es la argumentación que damos frente a una información que se nos brinda como verdadera y nos permite llegar a otra.
>
> E2-13: Una demostración matemática es la justificación o fundamentación de la veracidad o falsedad de una proposición planteada anteriormente.

En las respuestas anteriores el énfasis no recae en la *verificación/convicción* ni en la *explicación*, sino en *brindar un argumento convincente que justifique por qué es verdadera la proposición*. En otras palabras, según algunos estudiantes, el propósito de la demostración no sería en esencia el de verificar que una proposición es verdadera o convencer de que lo es (función de verificación/convicción), sino brindar un argumento convincente de por qué lo es, sin que esto implique que la demostración deba mostrar los engranajes que iluminan el resultado (función de explicación): importa más, según estos estudiantes, la cadena argumentativa que justifica la validez de una proposición que la justificación misma. Hay un cambio de foco, en relación a la función de verificación/convicción, desde el resultado al proceso, pero sin que este proceso tenga como objetivo la iluminación del resultado. Hemos creído entonces conveniente definir una nueva función de la demostración a la que llamamos de *fundamentación*, que se evidencia en quince estudiantes de primero (55,6 %), en veintitrés de segundo (62,2 %), en doce de tercero (63,2 %) y en seis de cuarto (37,5 %).

Si bien puede considerarse a la función de fundamentación dentro de la función de verificación/convicción, presenta un matiz que la distingue de esta última y la hace específica del ámbito educativo: cuando a un estudiante se le solicita realizar la demostración de una proposición dando por sentada su veracidad, la función de la demostración no puede ser la de verificación/convicción; por lo menos no en el mismo sentido en el que lo es cuando un matemático realiza la demostración de una proposición por primera vez. En el caso mencionado anteriormente, la tarea del estudiante —que está relacionada con mostrar que es capaz de brindar argumentos que justifiquen la validez de la proposición, más que con verificar que la proposición es verdadera—, determina otra función de la demostración (la de fundamentación) distinta de la de verificación/convicción. Por tanto, la función de fundamentación se manifiesta, por ejemplo, cuando el estudiante debe demostrar una proposición que sabe que es verdadera porque una autoridad externa a él (el profesor, el propio enunciado de la actividad que está realizando o hasta quizás un software) ha garantizado su validez. Esta situación podría estar evidenciando que el estudiante debe enfrentarse con frecuencia a demostrar proposiciones de las cuales ya conoce su valor de verdad.

*La función de ratificación*

Veamos las siguientes respuestas:

> E1-8: […] En realidad la demostración es lo único que respalda las afirmaciones hechas por el docente.
>
> E4-13: [Se demuestra] Para avalar un resultado de algo que ya fue demostrado por alguien.

Según estos estudiantes la demostración garantizaría la validez de una cierta proposición más allá de la palabra, por ejemplo, del profesor. Es decir, la demostración permitiría la objetivación del valor de verdad de una proposición de modo que su validez no dependa de un argumento de autoridad. Hemos denominado a esta función de la demostración en la matemática escolar, función de *ratificación*. Esta función está vinculada con la función de verificación/convicción; más precisamente podemos decir que es un caso particular de la función de fundamentación. Tanto en la función de fundamentación como en la de ratificación se hace ostentación de la demostración: importa más mostrar la cadena argumentativa que valida a la proposición, que verificar o convencer, ya que no se duda de que existen demostraciones de dicha proposición. Cuando el profesor presenta a sus estudiantes una demostración, no solo está presentando una serie de argumentos que justifican la veracidad de una proposición (fundamentación), sino que intenta legitimar a través de la misma lo que afirma (ratificación). En cambio, cuando el estudiante demuestra a solicitud del docente una proposición que ya sabe que es verdadera, el propósito de la demostración no es el de legitimar; en su rol de estudiante, su actividad tiene más que ver con mostrar que es capaz de presentar argumentos que justifican que la proposición es verdadera.
Dicha función la manifiestan cuatro estudiantes de primero (14,8 %), uno de segundo (2,7 %), ninguno de tercero y cinco de cuarto (31,3 %).

*La función de generalización*

A lo largo de nuestro estudio encontramos varias respuestas que señalan que la demostración permite *generalizar*; por ejemplo:

E2-14: [Una demostración matemática] Es lo que le da carácter de ciencia a la matemática al permitir la generalización de los enunciados.

La función de generalización la evidencian cuatro estudiantes de primero (14,8 %), seis de segundo (16,2 %), uno de tercero (5,3 %) y dos (12,5 %) de cuarto. Encontramos que los estudiantes indican que la demostración permite generalizar en cuatro sentidos distintos. En primer lugar la generalización está relacionada con la práctica de verificar que una proposición se cumple para algunos casos particulares y, luego, realizar una demostración para aceptar su validez "en general"[3]:

E1-5: La matemática se demuestra para poder probar a lo que se llegó y para poder generalizar la conclusión, para así asegurarse de que a lo que se llegó no es un caso particular.

En segundo lugar, los estudiantes están considerando una proposición que se "refiere" a un conjunto con infinitos elementos y están enfatizando el hecho de que la demostración permite obtener un resultado que es válido para cada uno de esos elementos sin la necesidad de probarlo elemento a elemento (lo que por otra parte sería imposible). La respuesta siguiente, aunque se le puedan realizar objeciones desde el punto de vista matemático, alude de un modo elocuente a esta forma de generalización:

E2-21: El objetivo de las demostraciones en matemática es que, para ciertos elementos de un conjunto, se cumpla la propiedad a demostrar. Por ejemplo en los ∞ demuestro que + es operación binaria diciendo que cualquier natural + 1 pertenece a ∞, lo cual me lo asegura; y no necesito probar con los infinitos casos (1+1, 2+1, 3+1, 4+1) lo que sería imposible. Entonces decimos que para ciertos (o todos) los elementos que se explicitan en la hipótesis se cumple la propiedad, de manera general sin tener que probarlo elemento a elemento.

En tercer lugar, los estudiantes hacen referencia a que ciertas demostraciones permiten validar proposiciones que abordan desde un punto de vista más general el mismo resultado que otras[4]. En este sentido es que el estudiante E2-30 habla de generalizar:

Profesor: … ¿En qué sentido decías que la demostración te permite generalizar?

E2-30: Claro, porque a veces, vos vas como… lo mismo, redunda en la parte de ampliar, vos a veces hacés una demostración y después resulta que esa demostración la podés ampliar y la podés, yo que sé, hacerla a la *n* por ejemplo, no sé.

---

[3] Por ejemplo, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, ¿se cumplirá que cualquiera sea $n$ natural, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$?

[4] Por ejemplo, la proposición: *Si* $(K,*,\bullet)$ *es cuerpo, entonces no admite divisores de cero*, es una proposición más general que: *El cuerpo* $(¡\ ,+,\square)$ *no tiene divisores de cero*.

Por último, los estudiantes pueden considerar que la demostración permite generalizar debido a que, luego de que la proposición es demostrada, esta es aplicable a todas las situaciones en donde la hipótesis se cumple:

> E2-17: [Se demuestra en matemática] Para aportarle a una proposición un carácter de universalidad, lo cual nos da la seguridad de poder utilizarlo como herramienta a la hora de enfrentarnos a cualquier problema matemático que cumpla sus premisas.
>
> E3-4: […] Se demuestra para verificar que bajo determinadas hipótesis, se puede sacar una conclusión que sirve en todos los casos que están enmarcados en las hipótesis…

*La función de comprensión de la disciplina*

Algunos estudiantes señalan que la demostración permite comprender mejor a la matemática:

> E3-9: […] [Se demuestra en la clase de matemática] para familiarizarse con la matemática en sí. Es decir, esta está llena de teoremas, conjeturas y demostraciones y es parte de la matemática el estar en contacto con ellos.
>
> E3-16: En secundaria pienso que es [que se demuestra] para que los alumnos se familiaricen, se empapen en cómo se trabaja en matemática. […]

Según estos estudiantes la demostración permitiría una comprensión más profunda del objeto de estudio de la matemática y de cómo se trabaja en dicha disciplina. A esta nueva función de la demostración en la matemática escolar la hemos llamado función de *comprensión de la disciplina*. Evidencian esta función, dos estudiantes de primero (7,4 %), dos de segundo (5,4 %), tres de tercero (15,8 %) y dos de cuarto (12,5 %). La presencia de esta función podría indicar que algunos estudiantes del Instituto de Profesores “Artigas” consideran que la demostración es una actividad intrínseca y sustancial de la matemática.

*La función relativa al rol docente*

Algunas respuestas están relacionadas con el futuro desempeño profesional de los estudiantes como profesores:

> E1-4: […] [Los profesores demuestran en el pizarrón] también para mostrarle al alumno que quiere ser profesor de matemática cómo hacer una demostración ordenada, al menos darle las herramientas para que en una clase futura lo pueda hacer por sí solo.
>
> E1-6: Los profesores del IPA hacen especial énfasis en mostrar demostraciones porque se busca algo diferente que en otras instituciones que enseñan matemáticas. Buscan que los estudiantes puedan ellos transmitir esas formas de razonamiento, para lo que precisan poder comprender e incorporar para poder trabajarlas.

Resulta interesante esta función, a la que hemos denominado función *relativa al rol docente*, porque es intrínseca no solo a la enseñanza de la matemática sino a la que refiere específicamente al profesorado: la demostración en el ámbito de la formación de profesores, según algunos estudiantes, tiene como uno de sus objetivos el preparar a los futuros docentes para el trabajo en el aula. Tres estudiantes de primero (11,1 %) evidencian esta función, tres de segundo (8,1 %), tres de tercero (15,8 %) y dos de cuarto (12,5 %).

## CONCLUSIONES

El estudio realizado revela que los estudiantes[5] poseen concepciones muy variadas en torno a las funciones de la demostración. Nuestro estudio tenía como propósito determinar las concepciones de los estudiantes relativas a las funciones de la demostración teniendo como referencia las funciones descritas por de Villiers (1993), pero las respuestas de los estudiantes determinó una tipología mucho más amplia.

Las cinco funciones descritas por de Villiers (1993) surgen del quehacer de los matemáticos profesionales e imponen, en algún sentido, al ámbito de la enseñanza de la matemática, una labor que favorezca su interiorización en los estudiantes. Es decir, el valor de estas funciones está determinado en forma extrínseca a la enseñaza de la matemática y parece estar justificado por la relevancia que estas funciones tienen en el ámbito de los matemáticos profesionales. A diferencia de las funciones descritas por de Villiers (1993), las nuevas funciones surgen en el ámbito de la enseñanza: son funciones que se infieren de las distintas respuestas que los estudiantes presentan en el cuestionario. Cuando decimos que surgen en el ámbito de la enseñanza, lo que queremos indicar es que las nuevas funciones se infieren de las respuestas de estudiantes: son las concepciones de los estudiantes las que delinean ciertas funciones, en contraposición a las funciones de de Villiers (1993) que surgen del ámbito de la matemática profesional. En este caso no se determina el valor de unas ciertas funciones y luego se analiza su presencia en el ámbito educativo, sino que la presencia de unas ciertas concepciones por parte de los estudiantes señalan unas ciertas funciones.

A excepción de la función de explicación, no hemos podido detectar diferencias destacables entre las concepciones referentes a las funciones de la demostración de los estudiantes de cuarto año y las concepciones de los estudiantes de los restantes grupos. Los estudiantes de cuarto año, por estar cursando el último año de la carrera, han tenido más oportunidad de realizar actividades vinculadas con la demostración, aunque esta experiencia mayor no se cristaliza en una visión más rica en lo que respecta a las funciones de sistematización, comunicación y descubrimiento. Por lo tanto, dado que una experiencia variada en torno a las funciones de la demostración favorece la evocación de las mismas, concluimos que los estudiantes de cuarto año no deben haber tenido una experiencia heterogénea en relación a dichas funciones: es posible que los estudiantes del Instituto de Profesores “Artigas” que participaron en este estudio, hayan tenido un contacto con la demostración que fue aumentando a través de los años cuantitativa más que cualitativamente en lo relativo a las funciones de la demostración.

---

[5] En esta sección con el término *estudiantes* estaremos haciendo exclusiva referencia a los estudiantes del profesorado de matemática del Instituto de Profesores “Artigas” que participaron en este estudio.

Por último, creemos que conocer las concepciones de los estudiantes –más allá de nuestras expectativas y de nuestro acuerdo– nos permite, entre otras cosas, posicionarnos mejor frente al desafío de enriquecer sus visiones en lo referente a las funciones descritas por de Villiers (1993). Pero además, estar al corriente de la diversidad de funciones que tiene la demostración para los estudiantes, puede permitir a los docentes implementar prácticas de aula más deliberadas: si los profesores a la hora de proponer actividades tienen en cuenta las diversas funciones que para los estudiantes se podrían estar poniendo en juego, quizás les sería posible tratarlas como variables sobre las cuales incidir ya sea para enfatizar una función o anularla. Por este motivo consideramos importante reflexionar, junto a los formadores de profesores y a los estudiantes del profesorado, en torno a la diversidad de funciones que tiene la demostración.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente.

Bell, A. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 23-40.

Davis, P. J. y Hersch, R. (1986). *Descartes' dream*. New York: HBJ Publishers.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, 15-30.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículum. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 125-134). Barcelona: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

Franco, G. (2010). *¿Por qué se demuestra en matemática? Concepciones de los estudiantes de un instituto de formación de profesores de matemática*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina.

Jones, K. (1997). Student-Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. *Mathematics Education Review*, *9*, 16-24.

Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics Teacher's Conceptions of Proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*, 379-405.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: Autor.

Sastre, P., Rey, A. M. G. y Boubée, C. (2008). Concepciones y creencias sobre la matemática en una Facultad de Agronomía: docentes, alumnos, graduados. Proyecto de investigación. *Memorias de la II REPEM*, 386-391.