

FORMAS DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ESCOLAR Y VALORACIONES DE LOS PROFESORES

Pozas Diana Cecilia

Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue
dianapozas@hotmail.com

RESUMEN

En este trabajo se presenta una encuesta respondida por un grupo de profesores de matemática. Dicha encuesta tuvo como principal objetivo que el docente reflexione sobre las diferentes resoluciones dadas a un mismo problema de álgebra elemental y finalmente mencione cuál es la que más valora, traduciendo dicha valoración a una nota numérica. Las resoluciones fueron efectuadas por estudiantes de 4° año y diferían entre sí según el sistema de representación utilizado por el alumno. Estos sistemas fueron: simbólico, gráfico-simbólico y aritmético. En general, los profesores de la muestra otorgaron notas altas a las distintas formas de resolución y aportaron observaciones para cada una de ellas. El análisis de las observaciones hechas por este grupo de profesores sugieren que los mismos otorgan mayor valoración a la resolución algebraica del problema, en donde se supone que el razonamiento algebraico es inseparable de su lenguaje formalizado.

Palabras clave: problema verbal, pensamiento algebraico, evaluación, sistemas de representación

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se inscribe en un proyecto de investigación que se está realizando en el Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue, referido a distintas dimensiones de la intervención docente en el ámbito de las prácticas escolares cotidianas. Consideramos que desde nuestra labor docente es necesario prestar atención a los procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra, a la evaluación de estos procesos y, en particular, a los instrumentos de los que nos valemos para evaluar las competencias algebraicas de los estudiantes. Nuestra área de indagación es la intervención docente en relación a la evaluación de las competencias algebraicas que los estudiantes manifiestan a través de la resolución escrita de un problema verbal. El periodo escolar que nos interesa es la educación secundaria obligatoria.

El énfasis otorgado a la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas conlleva una problemática que necesariamente afecta a la evaluación. En particular, la resolución de problemas verbales puede ser una manifestación de que hay una comprensión de los conceptos matemáticos involucrados y un uso competente de sus formas de expresión. En este trabajo nos interesa

analizar la valoración que los profesores hacen de las producciones escritas de los estudiantes, es decir, de aquellos razonamientos que pueden ser proporcionados o comunicados a través de lápiz y papel. La pregunta que nos hacemos es: ¿Cómo evalúa el docente las soluciones que los estudiantes de secundaria producen cuando resuelven por escrito problemas verbales?

MARCO CONCEPTUAL

Lesh y Lamon (1992) abordan la discusión sobre un tipo de cuestiones para la evaluación del conocimiento matemático, son las llamadas cuestiones de elicitación del conocimiento. Señalan que los problemas ofrecen la oportunidad de documentar un nivel inicial del estudiante, y las transformaciones que se realizan en él hasta alcanzar un nivel más complejo. En este sentido, los problemas verbales son tareas que elicitan el conocimiento y ofrecen oportunidades de documentar la competencia en matemática de los estudiantes debido a la multiplicidad de formas de abordarlos. Al mismo tiempo, el profesor recibe un amplio abanico de respuestas de la clase, que ordenadas por sofisticación, dan un retrato de la manera en que los estudiantes se desarrollan, lo que ofrece al profesor la base para tomar decisiones de instrucción.

Respecto a la estructura algebraica o aritmética de un problema verbal, Paralea y Socas (1995), señalan que la determinación del límite que existe entre una estructura y otra depende de los sistemas de representación elegidos, los cuales provocan en el resolutor un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su resolución.

Los *sistemas de representación* ponen de manifiesto los procesos cognitivos de los estudiantes y son necesarios para comunicar las ideas matemáticas, tomando forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos (Castro y Castro, 1997). En las resoluciones de problemas verbales, proporcionadas mediante lápiz y papel, se han identificado cinco categorías de sistemas de representación (Flores y Fernández, 2001). Estos sistemas de representación son:

1. *Ensayo-error*: se utiliza cuando se prueba, de forma sistemática, varios valores numéricos para la/s incógnita/s, estableciendo las relaciones implícitas en el problema, y utilizando los valores fallidos para conjeturar nuevos valores que aproximen paulatinamente los resultados correctos.
2. *Parte-todo*: se establecen relaciones numéricas mediante estrategias de comparación e igualación. Se consideran los datos desconocidos como parte del resultado de operar los datos conocidos y comparando el total con la parte.
3. *Gráfico*: se utiliza un código gráfico para plantear las relaciones entre datos e incógnitas. Las operaciones numéricas que se realizan son planteadas desde el gráfico, todavía no hay generalidad.
4. *Gráfico-simbólico*: se tratan de establecer las relaciones mediante un lenguaje simbólico, pero con un apoyo explícito de un gráfico o dibujo donde se van colocando los datos y las incógnitas.

5. *Simbólico*: se utiliza un lenguaje algebraico puro. Se identifican las incógnitas con símbolos (letras) y se expresan las relaciones mediante ecuaciones. En general, no se utilizan gráficos o dibujos para representar los datos y/o las relaciones. La modelización realizada se puede aplicar a cualquier otro problema de similares características.

Es importante mencionar la existencia de varios estudios, como el de Arcavi, Friedlander y Hershkowitz (1990), por ejemplo, que dan cuenta de que hay estudiantes que pueden, al menos parcialmente, actuar en un nivel cualitativo sin el lenguaje simbólico del álgebra. Siguiendo a estos autores, consideramos que los alumnos son capaces de realizar diferentes tipos de justificaciones sin utilizar el lenguaje algebraico. Asimismo, reconocemos que existen otras situaciones en las que la ausencia de un potente lenguaje simbólico representa un obstáculo para el avance del conocimiento matemático del alumno.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Ante un panorama tan amplio como lo es el de la enseñanza del lenguaje matemático, en una primera etapa de este estudio, definimos temas o ejes sobre los cuales indagar en profundidad, y para ello surgió la necesidad de diseñar instrumentos que facilitaran esa tarea. Concretamente, nos interesó conocer las habilidades algebraicas manifestadas por estudiantes de 4º año (16 – 17 años) en la resolución de ecuaciones de primer grado, en la resolución de problemas algebraicos y en la resolución de sistemas de ecuaciones.

Fue así que en una primera etapa de esta investigación se administraron encuestas a 120 estudiantes de 4º año de dos colegios de San Carlos de Bariloche. Se incorporó, entre otros ejercicios, el siguiente problema:

De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito (Guzmán, Colera y Salvador, 1987, p.78).

De los 120 estudiantes encuestados, el 70% resolvió incorrectamente el problema, presentando el mismo tipo de error en la mayoría de los casos. Dicho error se manifestó en el pasaje al lenguaje algebraico. Es decir, en la traducción de los datos del problema y sus relaciones, a una ecuación. Aparecieron algunas resoluciones, correctas y distintas entre sí, las cuales se incorporaron a una encuesta (ver Anexo) diseñada para los profesores. Las resoluciones que los docentes valoraron fueron efectivamente realizadas por estudiantes de 4º año en el aula, pero en forma voluntaria y anónima. La encuesta diseñada es similar al instrumento que Espinosa (2005) presentó en su trabajo de tesis acerca de la evaluación en álgebra elemental utilizando problemas verbales.

Se repartieron un total de 20 encuestas para ser respondidas por los profesores de tres colegios de Bariloche. Respondieron a la misma 12 profesores. La tabla 1 que se muestra a continuación, muestra las calificaciones o las valoraciones que los docentes pusieron a cada resolución.

Profesor/a	Resolución 1	Resolución 2	Resolución 3	Resolución 4
1	8	9	7	6
2	10	10	10	10
3	9	10	7	7
4	7	10	5	7
5	8	10	5	3
6	10	10	10	10
7	10	10	10	10
8	9	10	10	9
9	10	10	10	8
10	10	10	10	9
11	10	10	10	10
12	9	10	7	7

Tabla 1: nota numérica que los profesores otorgan a cada resolución.

OBSERVACIONES APORTADAS POR LOS PROFESORES

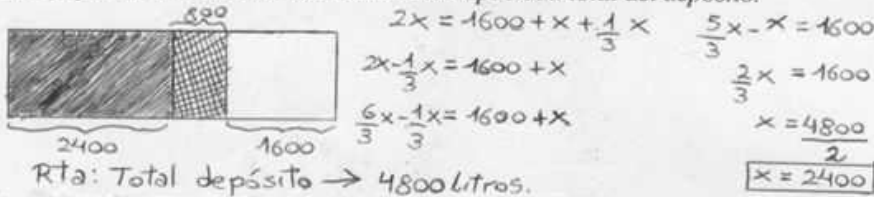
A continuación se transcriben las observaciones que los docentes hicieron a cada resolución. En algunos casos se repitieron, por lo cual hay menos observaciones transcritas.

Resolución 1: el alumno utiliza un sistema de representación gráfico - simbólico.

- El gráfico es representativo de la situación planteada.

2. Resuelve el siguiente problema:

De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.



Rta: Total depósito \rightarrow 4800 Litros.

- Alcanza el objetivo (el resultado correcto), buen manejo del lenguaje simbólico y gráfico.
- La ecuación podría ser más económica.
- No se aclara o no se explicita qué representa x .
- El planteo no corresponde a un alumno de 4° año.
- Debería dejar de lado los gráficos y plantear una ecuación algebraica directamente.

- Es la resolución más esperada.
- La consigna no pide justificar, sólo calcular.

Resolución 2: el alumno utiliza un sistema de representación simbólico.

2. Resuelve el siguiente problema:
De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.

$\frac{x}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{x}{6}$
 $x - x/2 - (x/2) : 3 = 1600$
 $x = \frac{1600}{1/3}$
 $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6-3-1}{6}$

$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x = 1600$
 $\frac{2}{6}x = 1600$
 $x = 4800 \text{ l.}$

- Es la solución más "prolija".
- Indica mayor nivel de abstracción, traduce directamente al lenguaje algebraico.
- Se manejan correctamente propiedades y cálculos en \mathbb{Q} .
- Es una resolución acorde con un alumno de 4° año en cuanto al uso del álgebra.
- Falta una representación gráfica.
- No aclara el significado de x .
- Si bien no utiliza un gráfico, interpreta correctamente.
- Si bien no aclara el significado de x , utiliza el más convencional, que es x : total del depósito.

Resolución 3: el alumno utiliza un sistema de representación parte – todo.

2. Resuelve el siguiente problema:
De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.

$\frac{1}{2}$ del depósito $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} - 1600 \text{ l} \\ \frac{1}{3} - x = \frac{1}{3} \cdot 1600 \end{array} \right.$
 $x = \frac{800}{\frac{2}{3}}$
 $x = 800 \text{ l}$

$8 = 8$

Capacidad total de depósito = $6.800 = 4800 \text{ l}$

- El planteo y el razonamiento son correctos.
- La resolución es simple y lógica. Utiliza recursos de la escuela primaria.
- Es uno de los casos en que más se evidencia abstracción.
- Sólo aplica una regla de 3, no evidencia un razonamiento del problema.
- Lo resuelve de una manera muy primitiva, no se sabe si el alumno aplicó proporcionalidad conscientemente.

- *Muy rebuscada, corre el peligro de confundirse en el razonamiento.*
- *Aplica de manera poco ortodoxa el concepto de fracción.*
- *¿Qué sucede si el problema no logra llevarlo a una proporcionalidad?*
- *Hay cálculos no explicitados, por ejemplo: $6 \cdot 800$*
- *Un alumno de 4° año debería plantear ecuaciones.*
- *Es la resolución más rara.*
- *La consigna no especifica el planteo de ecuaciones.*

Resolución 4: el alumno utiliza un sistema de representación gráfico.

2. Resuelve el siguiente problema:
 De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.

$\frac{2}{3}$ — 1600 L.
 $\frac{1}{3}$ — $1600 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1600}{3}$
 $\frac{200}{3}$ — $\frac{1600}{3} - \frac{200}{3} = 800$ total = 4800 Lts.

- *Corresponde a un nivel concreto de razonamiento.*
- *Es una solución rara, igual que la solución 3.*
- *Es rebuscada e infantil, pero más clara que la solución 3.*
- *Si bien hay una gráfica indicativa de un razonamiento, ésta solución no se diferencia mucho de la solución 3.*
- *Logra más abstracción que en la solución 1 y 2.*
- *La igualdad $\frac{1}{2} = 2400$ no debería corresponder a un alumno de 4° año.*

DISCUSIÓN

La encuesta tuvo como principal objetivo que el docente reflexione sobre las diferentes resoluciones dadas a un mismo problema verbal de álgebra elemental y finalmente mencione cuál es la que más valora, traduciendo dicha valoración en una nota numérica. El hecho de que todos los estudiantes llegaran al resultado correcto condicionó la mayoría de las calificaciones, dado que en general los profesores pusieron notas altas a todas las resoluciones. Quizás porque independientemente del camino elegido por el alumno, consideraron que éste puso en juego un conocimiento matemático práctico que le permitió llegar al resultado correcto. En otras palabras, el alumno trabajó con cierta autonomía de pensamiento, actitud muy valorada por los docentes en general. Pero, en las fundamentaciones aparecen comentarios que hacen pensar que si bien el

alumno resolvió el problema, no procedió de la forma que se esperaría para su nivel de escolaridad.

Parece ser que la solución 2 es la más valorada. Aún así, en este punto, varios señalaron que faltaba explicitar el significado de la letra x . Es decir, prestaron especial atención a una especificidad importante del lenguaje matemático que es la no ambigüedad. Esto implica que el significado de cada término o símbolo en particular debe estar perfectamente definido en lo que respecta a su objetivo y a su extensión (Maier, 1999). Sin embargo, casi nadie parece estar dispuesto a bajar la calificación por esta omisión.

Otra variable que originó valoraciones distintas fue la presencia o no de un gráfico en las resoluciones. Para algunos docentes el uso de un gráfico implica trabajar en el campo de lo concreto, sin llegar a una abstracción y por lo tanto no hay una generalización en términos algebraicos. Para otros docentes, una representación visual (icónica, geométrica o diagramática) es sólo un soporte que permite la inmersión en la situación problemática por parte del alumno, y puede o no, estar presente en la resolución.

Conviene tener en cuenta que, generalmente, los estudiantes pueden resolver por sus propios medios los problemas típicos que la escuela les exige a propósito del aprendizaje de las ecuaciones. Es decir, utilizan distintos sistemas de representación. El sistema de representación simbólico o algebraico es el más avanzado de todos, y es uno de los objetivos en la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria. Indica, entre otras cosas, un nivel de pensamiento más elaborado que permite abordar otros contenidos matemáticos superiores. Aún así, Kieran y Filloy (1989) señalan que, ante un problema, es posible que la elección de estrategias de resolución más cercanas al campo del álgebra dependa, en gran medida, del resolutor y no del problema en sí. Estos mismos autores indican que cuando se usan sistemas de signos matemáticos en una situación de resolución de problemas algebraicos, se entremezclan el nivel de competencia con el aspecto pragmático, que procede del entorno de enseñanza en el que se está llevando a cabo el proceso de aprendizaje.

Considerando que la encuesta dice que el resolutor es un estudiante de 4° año, varias de las fundamentaciones dadas indicarían que los docentes de esta muestra suponen que el alumno ya debería tener incorporado un lenguaje algebraico que le permita traducir el texto de un problema a una ecuación, más allá que la consigna lo pida o no.

REFLEXIONES FINALES

En cuanto al propósito de la encuesta y la expresión de sus resultados se refleja la connotación cuantitativa que le dan los profesores a la evaluación en matemática, por cuanto consideran que si el alumno llegó al resultado correcto entonces logró su objetivo. Asimismo consideran que los procedimientos no deben ser evaluados si éstos no están perfectamente aclarados en la consigna.

Este grupo de profesores otorgan mayor valoración a la resolución algebraica del problema, en donde se supone que el razonamiento algebraico es inseparable de su lenguaje formalizado. Esto es, que los problemas verbales deberían resolverse en un marco algebraico a través de su traducción a una ecuación o a otra expresión algebraica. Algunas observaciones parecen sugerir que no se tiene en cuenta que el uso competente del álgebra genera dificultades serias en el alumno, que no se resuelven haciendo más claras las consignas.

La ejecución generalizada del marco algebraico depende fuertemente de un tratamiento escolar adecuado, que contemple otros sistemas de representación, ejecutados por un porcentaje significativo de alumnos sea cual sea su nivel de escolaridad.

Desde el proyecto de investigación consideramos que, dada la problemática del álgebra escolar, la investigación en este campo es muy importante para paliar, en lo posible, el "fracaso escolar" que es debido en gran parte a las matemáticas y a su lenguaje, símbolos y reglas, abstracto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arcavi, A., Friedlander, A. & Hershkowitz, R. (1990). L'algèbre avant la lettre. *Petit x*, 24, 61-71.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Barcelona: Horsori.
- Espinosa, E. (2005). Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.
- Flores, P. y Fernández, F. (2001) Reflexiones sobre un problema profesional relacionado con la enseñanza del álgebra. Perales, F.J. y otros (Eds.) Congreso Nacional de Didácticas Específicas. Granada, GEU, 1787-1800.
- Guzmán, M.; Colera, J. y Salvador, A. (1987) Matemáticas - Bachillerato 1. Barcelona: Anaya.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.
- Lesh, R. y Lamon, S. (1992). Assessing Authentic Mathematical Performance. In R. Lesh y S. Lamon (Eds.) *Assessments of Authentic Performance in School Mathematics* (pp. 17-62). Washington, DC: American Association for the Advancement of Sciences Press.
- Maier, H. (1999). El conflicto para los alumnos entre lenguaje matemático y lenguaje común. México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Paralea, M. y Socas, M. (1995). Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma*, 20,29-36.

Anexo



UNIVERSIDAD DEL COMAHUE

CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO BARILOCHE

Estimado/a Profesor/a:

La siguiente encuesta se diseñó en el marco de un proyecto de investigación de la Universidad Nacional del Comahue cuyas integrantes somos docentes del Centro Regional Universitario Bariloche. Nuestro interés investigativo se ubica en el campo de la didáctica, y uno de los objetivos del proyecto es abordar la intervención docente en relación a la enseñanza del lenguaje matemático.

Consideramos que es importante realizar este tipo de estudios ya que aportan elementos que permitirían repensar la tarea del docente respecto a la enseñanza y al aprendizaje del álgebra.

Los datos obtenidos a través de esta encuesta serán utilizados para un estudio exploratorio.

Muchas gracias por su colaboración.-

A continuación se presenta un problema resuelto por 4 alumnos de 4° año y cada uno de ellos lo realiza de diferente forma. Se le pide que evalúe cada una de ellas en escala de 0 a 10 y explique brevemente esa valoración.

Solución 1.

2. Resuelve el siguiente problema:
De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.

$2x = 1600 + x + \frac{1}{3}x$
 $2x - \frac{1}{3}x = 1600 + x$
 $\frac{5x}{3} - x = 1600$
 $\frac{2x}{3} = 1600$
 $x = \frac{4800}{2}$
 $x = 2400$

Rta: Total depósito \rightarrow 4800 litros.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

¿Por qué? _____

Solución 2.

2. Resuelve el siguiente problema:
De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{x}{6}$$
$$x - x/2 - (x/2):3 = 1600 \quad x = \frac{1600}{1/3} \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6-3-1}{6}$$
$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x = 1600 \quad \boxed{x = 4800L}$$
$$\frac{2}{6}x = 1600$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

¿Por qué? _____

Solución 3.

2. Resuelve el siguiente problema:
De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.

$$\frac{1}{2} \text{ del depósito } \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \text{ --- } 1600L \\ \frac{1}{3} \text{ --- } x = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1600}{\frac{2}{3}} \end{array} \right.$$
$$x = \frac{800}{\frac{2}{3}} \quad x = 800L$$


Capacidad total de depósito = $6.800 = \boxed{4800L}$ ←

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

¿Por qué? _____

Solución 4.

2. Resuelve el siguiente problema:
De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad total del depósito.


$$\frac{2}{3} \text{ --- } 1600L$$
$$\frac{1}{3} \text{ --- } 1600 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1600}{3}$$
$$\frac{1600}{\frac{2}{3}} = \frac{1600 \cdot 3}{2} = 800$$
$$\frac{1}{2} = 2400$$

total = $\boxed{4800 \text{ Lts.}}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

¿Por qué? _____