

# ANÁLISIS DE ERRORES EN LA CONVERSIÓN DE REPRESENTACIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS DEL REGISTRO GRÁFICO AL ALGEBRAICO

María Andrea Aznar, María Laura Distéfano, Gloria Prieto, Emilce Moler  
Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería.  
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Mar del Plata. Prov. de Buenos Aires (Argentina)  
maznar@fi.mdp.edu.ar

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un análisis semiótico sobre de las dificultades que poseen los alumnos al realizar conversiones del registro gráfico al registro algebraico en el tema Números Complejos. Se indagó sobre los errores más frecuentes que se manifiestan al efectuar estas transformaciones, se los caracterizó, clasificó y sistematizó. La experiencia se realizó con alumnos de la asignatura Álgebra de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Las conclusiones obtenidas conducen a reflexionar sobre la necesidad de abordar sistemáticamente la tarea de conversión para favorecer la coordinación entre registros y la conceptualización del objeto matemático en estudio.

**Palabras clave:** números complejos, registros semióticos, conversiones

## INTRODUCCIÓN

La enseñanza tradicional de la matemática ha privilegiado el uso del registro algebraico en la resolución de problemas y, como afirma Artigue (1995), le ha dado al registro gráfico un status inframatemático. Las representaciones gráficas suelen ser utilizadas como complemento de las soluciones analíticas, efectuadas en el registro algebraico o simbólico, pero no son tomadas como punto de partida del cual extraer datos y herramientas para la resolución de un problema. Es así como el registro gráfico resulta relegado o subordinado a otros registros al desarrollarse la actividad matemática en el aula. Esta situación se extiende, por supuesto, al material de ejercitación que se propone para el trabajo en clase. Entre las conversiones que están involucradas en los ejercicios que componen las guías de trabajos prácticos de ciertos temas, es frecuente observar que sólo aparecen aquellas en que la transformación va desde el registro algebraico al gráfico, pero no las de sentido inverso. Esta preeminencia de unas sobre otras pareciera surgir de la suposición de que son actividades cognitivas análogas y que, si un alumno es capaz de efectuar la transformación desde un registro A hacia otro B también podrá hacerlo desde el registro B hacia el registro A. Sin embargo, esta suposición no se condice con lo que se observa cotidianamente en el aula, puesto que cuando se proponen conversiones del registro gráfico al

algebraico, los alumnos tienen escaso éxito al resolverlas. Debe tenerse en cuenta que, para realizar las conversiones del registro algebraico al gráfico en el plano cartesiano, el alumno obtiene un conjunto de pares ordenados aplicando una fórmula o ecuación, que están asociados a sus correspondientes puntos en dicho plano, mientras que para la conversión en el sentido inverso, se requiere del alumno un esfuerzo cognitivo superior, pues debe descubrir cuáles son los rasgos del gráfico que caracterizan la representación y traducirlos a una expresión algebraica o simbólica (ecuación o inecuación). La imposibilidad para concretar tales transformaciones obstaculiza la conceptualización del objeto de estudio (Duval, 2004), y limita, al mismo tiempo, las posibilidades de visualización de un problema.

En este trabajo se presenta un análisis de las dificultades que poseen los alumnos al realizar conversiones del registro gráfico al registro algebraico en el tema Números Complejos. Se indagó sobre los errores más frecuentes que se manifiestan al efectuar estas transformaciones, y se los caracterizó, clasificó y sistematizó. Los alumnos que realizaron esta tarea de conversión ya habían cursado la unidad temática correspondiente a Números Complejos, del programa de la asignatura Álgebra A de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Al momento de la toma de datos, los estudiantes ya habían resuelto numerosos ejercicios en los que debían representar gráficamente los números complejos que verificaran determinadas condiciones, expresadas simbólicamente, es decir que se habían entrenado en efectuar conversiones del registro algebraico al registro gráfico, sin embargo no habían efectuado ninguno en el sentido contrario.

A continuación se describen las ideas centrales del marco teórico que sustenta este trabajo.

## MARCO TEÓRICO

La Teoría de Registros Semióticos (Duval, 1998, 2004, 2006b) reconoce tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la *formación* de representaciones, el *tratamiento* (transformación efectuada dentro de un mismo registro) y la *conversión* (transformación efectuada entre distintos registros).

La *formación* de representaciones en un registro implica la selección de signos apropiados dentro del conjunto de signos del mismo, combinados de acuerdo a sus reglas de conformidad. Estas reglas se refieren esencialmente a: la determinación de unidades elementales, las combinaciones admisibles de dichas unidades y las condiciones de pertinencia y completitud de una representación de orden superior (Duval, 2004).

Los *tratamientos* y las *conversiones* están directamente vinculados a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: su transformabilidad en otras representaciones. Particularmente, las conversiones resultan de un nivel de dificultad superior puesto que son transformaciones externas al registro de partida y con frecuencia no hay reglas que sistematicen o regulen su ejecución. Esta es una de las razones por las que "...la conversión de las representaciones

semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos.” (Duval, 2004, p.49).

Sin embargo, resultan de vital importancia para el aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos. Por otra parte, el quehacer matemático requiere que los individuos puedan elegir, entre varios, el registro de representación más adecuado según el propósito de la actividad a realizar. De acuerdo con Duval (2006a), la posibilidad de efectuar esta elección está sujeta a la habilidad de coordinar distintos registros de representación y a la de reconocer la presencia del mismo objeto en dos representaciones diferentes.

Las conversiones que no son triviales ni inmediatas porque los elementos involucrados, es decir las *unidades significantes*, no están en correspondencia uno a uno, se denominan *no congruentes*. Este tipo de conversiones, como es el caso de las planteadas en este trabajo, requieren de especial atención en el proceso de enseñanza y aprendizaje y deben ser abordadas intencionalmente, dado que:

...Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable observado en el aprendizaje de la Matemática, a todos los niveles y en todos los dominios; (...) la conversión, en los casos de no congruencia, presupone una coordinación de los dos registros de representación movilizados, coordinación que nunca existe al inicio y que no se construye espontáneamente... (D'Amore, 2005, p.32)

La identificación de las unidades significantes tanto en el registro de partida como en el de llegada, es condición necesaria para toda actividad de conversión y, por consiguiente para el desarrollo de la coordinación entre distintos registros de representación.

En la siguiente sección se presentan las características metodológicas referidas a la población y al material utilizado para el relevamiento de datos de este trabajo.

## **METODOLOGÍA**

Se tomaron datos de 100 alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, que cursan la asignatura Álgebra, en la cual ya se había terminado de dictar la unidad temática del programa correspondiente a Números Complejos, que representan el 40 % de la matrícula de dicha asignatura.

## **MATERIAL**

Se trabajó con un instrumento constituido por seis ítems. Cada ítem contiene la representación gráfica de un conjunto de complejos con una característica común sobre la parte real, el módulo o el argumento. En los tres casos, se presentaron ítems bajo dos modalidades: uno en el que la

característica común asume un único valor y otro, variando en un rango de valores. Esta característica común constituye la unidad significativa que los estudiantes debieron identificar en cada caso, para luego expresarla en forma de una ecuación o una inecuación en el lenguaje algebraico. Los ítems estuvieron estructurados de manera tal que las unidades significativas a identificar no guardan un orden. Así, en los ítems (a) y (d) es el módulo, en los ítems (c) y (e) el argumento y la parte real, en los ítems (b) y (f).

A continuación se presentan, a modo de ejemplo, dos de los ítems del instrumento. En el Gráfico 1, correspondiente al ítem (a) del instrumento, se representan números complejos caracterizados por un único valor sobre el módulo; en el Gráfico 2, correspondiente al ítem (e) los complejos representados están caracterizados por los valores que toman sus argumentos dentro de un rango acotado.

**Ítem (a)**

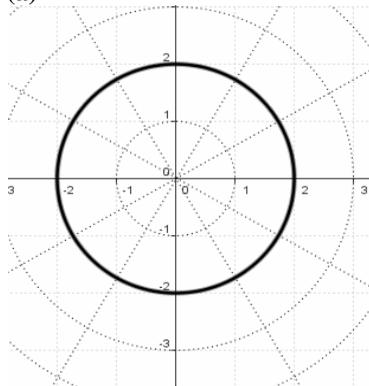
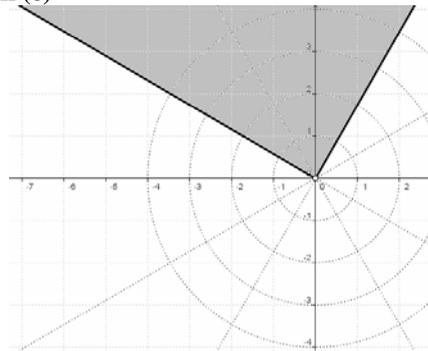


Gráfico 1. Representación de números complejos cuyos módulos toman un único valor fijo

**Ítem (e)**



Observación:  $0+0i$  está excluido

Gráfico 2. Representación de números complejos cuyo argumento toma un rango de valores acotados

## PROCEDIMIENTO

Los alumnos que resolvieron las actividades del instrumento descrito no recibieron ninguna formación específica en lo referido a la identificación de las unidades significativas en la representación gráfica de los números complejos, ya sea en su expresión en forma binómica o en forma polar. El instrumento se administró durante una clase práctica de la asignatura. En esa instancia del dictado de la materia, ya se había trabajado en las dos clases anteriores con ejercitación, de la guía de trabajos prácticos correspondiente a la unidad Números Complejos de la asignatura, que contiene ejercicios cuya resolución involucra únicamente conversiones desde el registro algebraico al gráfico, es decir en el sentido inverso al que evalúa el instrumento.

El tiempo de administración fue de 15 minutos.

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la administración del instrumento descrito anteriormente.

## RESULTADOS

En todos los incisos se consideraron tres aspectos para la corrección:

- la identificación de las unidades significantes presentes en el gráfico dado
- la identificación del valor o rango de valores correspondientes que toma esa unidad significativa
- la representación, en el lenguaje algebraico, de la relación entre unidad significativa y sus valores.

La conversión se consideró satisfactoria en los casos en los que los tres aspectos enunciados anteriormente fueran resueltos correctamente.

## EFFECTIVIDAD EN LAS CONVERSIONES

En la Tabla 1 aparecen las características de cada uno de los incisos del instrumento acompañados de los porcentajes de alumnos que resolvieron exitosamente la conversión correspondiente. Los incisos fueron ubicados en el instrumento de modo tal que no hubiera un orden que le sugiriera al alumno la unidad significativa a identificar. Para facilitar la lectura en este trabajo, se presentan en la Tabla 1, ordenados de acuerdo con la unidad significativa; en los primeros tres casos, tomando un único valor y un rango de valores en los tres últimos.

<b>Característica del conjunto de complejos graficados en cada ítem</b>	<b>Porcentaje de alumnos que realizaron la conversiones satisfactoriamente</b>
Ítem (a): el módulo toma un único valor	52%
Ítem (b): la parte real toma un único valor	54%
Ítem (c): el argumento toma un único valor	37%
Ítem (d): el módulo toma un rango de valores acotados	34%
Ítem (f): la parte real toma un rango de valores acotados	38%
Ítem (e): el argumento toma un rango de valores acotados	23%

Tabla 1. Porcentaje de alumnos que realizaron conversiones satisfactorias

En el Gráfico 3 se presentan los porcentajes de resoluciones correctas. Los mismos están agrupados de acuerdo con la unidad significativa que caracteriza a cada una de las representaciones gráficas que constituyen el instrumento administrado, lo que permite comparar los resultados que corresponden a la misma unidad significativa, tomando ésta un único valor fijo o un rango de valores acotados.

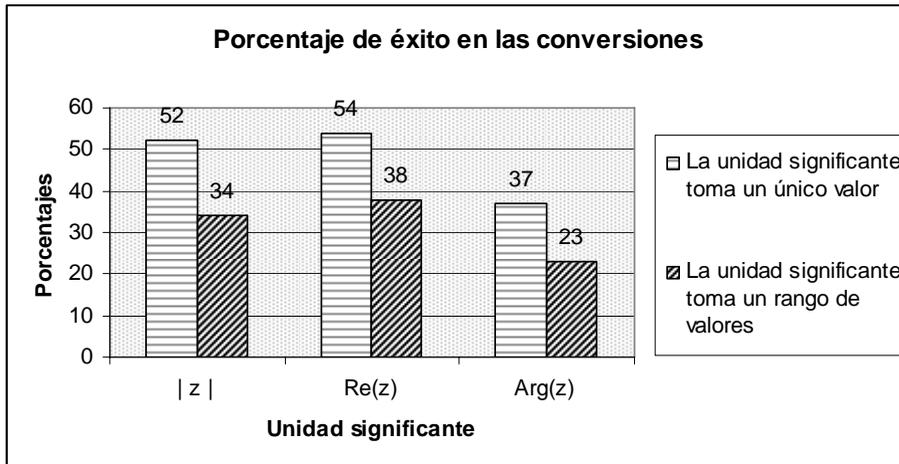


Gráfico 3. Porcentajes de conversiones satisfactorias agrupados según la unidad significativa característica

### TIPIFICACIÓN DE LOS ERRORES

La descripción de los errores que se observaron con mayor frecuencia se muestra en la Tabla 2, junto al porcentaje de aparición de los mismos, tomados sobre el total de los alumnos que resolvieron el ítem, y discriminados según la variabilidad de la unidad significativa.

El análisis de los mismos resulta de interés pues la falta de capacidad para realizar la conversión, pone en evidencia la parcial conceptualización del objeto matemático de estudio, o dificultades en la formación de representaciones de acuerdo con las reglas de conformidad del registro algebraico.

<b>Tipo de error</b>	La unidad significante toma un único valor	La unidad significante toma un rango de valores
Confunden parte real con parte imaginaria	5%	8%
Consideran módulos negativos.	0%	7%
Escriben en orden invertido los valores que acotan el módulo de los complejos representados.	---	3%
Identifican incorrectamente el valor del ángulo correspondiente al argumento.	19%	17%
Escriben en orden invertido los valores de los ángulos que acotan el argumento de los complejos representados.	---	13%
Agregan condiciones que excluyen al complejo nulo en los ítems en que se caracteriza al argumento.	25%	22%
Escriben “z”, en lugar de: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\text{Arg}(z)</math></li> <li>• <math> z </math></li> <li>• <math>\text{Re}(z)</math></li> </ul>	7% 5% 16%	7% 6% 11%

Tabla 2. Tipificación de los errores más observados

En la próxima sección se analizan en qué casos los alumnos tuvieron menor efectividad para lograr la conversión y las posibles causas de los errores hallados con más frecuencia.

## DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

A partir de la Tabla 1 y el Gráfico 3 pueden realizarse las siguientes observaciones:

- Los incisos en los que los números complejos graficados comparten una característica que toma un *único valor* tienen mayor porcentaje de éxito que aquellos en los que la misma toma un *rango de valores* acotados. Esta diferencia en los porcentajes podría adjudicarse a que el nivel de dificultad aumenta en los tres aspectos considerados:

- la identificación de la unidad significativa, pues no resulta tan evidente en regiones sombreadas del plano, lo que puede confundir su individualización como característica común.
- la identificación del rango de valores que toma esa unidad significativa, porque las cotas se constituyen en dos valores a reconocer.
- la representación, en el lenguaje algebraico, de la relación entre unidad significativa y sus valores, puesto que requiere expresar el rango de valores con dos condiciones en forma de inecuaciones.

• La unidad significativa que se evidencia como de mayor dificultad es el *argumento*, tanto para distinguirlo como característica común, como para determinar el ó los valores que toma. Esto podría deberse a que las representaciones gráficas “recta vertical” o “circunferencia”, asociadas a la parte real y el módulo respectivamente, constituyen rasgos gráficos de objetos matemáticos que los alumnos han trabajado anteriormente. No es ése el caso de los números complejos caracterizados por poseer el mismo argumento, cuyo rasgo gráfico es el de una semirrecta.

• Algunos de los errores detectados, en los ítems cuya unidad significativa es el módulo o el argumento, inducen a pensar que los alumnos intentan resolverlos realizando una “lectura cartesiana” sobre los gráficos en lugar de una “lectura polar”, es decir, una lectura de izquierda a derecha en lugar de una lectura que parte del semieje positivo de las abscisas. Esto puede observarse en la incorrecta determinación del valor de los argumentos o en la inversión en los

valores que acotan módulos o argumentos, por ejemplo escriben  $\frac{5}{6}\pi \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{6}$  en lugar de

$\frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{5}{6}\pi$  o escriben  $-4 \leq |z| \leq -3$  en lugar de  $3 \leq |z| \leq 4$ .

Por otra parte, del análisis de los errores catalogados en la Tabla 2 pueden efectuarse las siguientes consideraciones:

• La confusión entre la parte real y la parte imaginaria podría deberse a asociar erróneamente el rasgo gráfico “recta vertical paralela al eje imaginario” con condiciones sobre la parte imaginaria. Pareciera existir una intención de forzar la congruencia de la conversión vinculando el paralelismo del registro gráfico con una relación o condición sobre la parte imaginaria en el registro algebraico.

• El hecho de otorgarle al módulo un valor negativo pone en evidencia la falta de conceptualización del objeto matemático módulo de un número complejo. Este error se percibió especialmente en el ítem en el cual el módulo toma valores dentro de un rango. La representación resulta entonces un “aro” o “anillo” del cual pareciera que realizan la lectura sobre el semieje negativo de las abscisas, que es la primera información que aparece en una “lectura cartesiana”

del gráfico, en lugar de una “lectura polar”, y sin tener en cuenta el sentido o significado del módulo.

- La inversión en el orden de los valores que acotan al módulo y al argumento sugiere la necesidad de trasladar un orden visual de izquierda a derecha, posiblemente heredado del orden de los números en la recta real, a un orden algebraico, forzando un mismo orden de aprehensión entre las unidades significantes de ambas representaciones, como si la idea latente fuera, los complejos que figuran “más a la izquierda en el gráfico” tienen que tener menor argumento o menor módulo que los representados más a la derecha.
- La identificación incorrecta del valor del ángulo correspondiente al argumento está manifestando, no la falta de identificación de la unidad significativa, sino la incorrecta lectura de la representación de ángulos en el plano cartesiano. Esto revela un escaso dominio de las *reglas de conformidad* que definen al registro gráfico, particularmente las referidas a “las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa” (Duval, 2004, p.43).
- La necesidad que evidenciaron algunos alumnos, de incorporarle a los ítems caracterizados por el argumento, alguna otra condición para excluir al complejo nulo, estaría sugiriendo que suponen que el número complejo  $0+0i$  tiene argumento.
- El escribir “z” en lugar de  $\text{Arg}(z)$  o  $|z|$  o  $\text{Re}(z)$  podría deberse a la no identificación de la unidad significativa en el registro gráfico. Es decir, pareciera que los alumnos no distinguen cuál de los elementos de la dupla binómica (parte real-parte imaginaria) o de la dupla polar (módulo-argumento) es el que caracteriza al conjunto de complejos representados, asociándolo a la variable “z” que expresa la dupla completa.

## CONCLUSIONES

El presente trabajo permite concluir que, si bien a los alumnos a los que se les administró el instrumento ya habían realizado numerosas actividades que involucraban conversiones desde el registro algebraico al registro gráfico se observaron serias dificultades en su desempeño en las actividades planteadas en el instrumento.

En un análisis exhaustivo y detallado se observa que los porcentajes de resoluciones erróneas obtenidos conducen a la idea de que la habilidad de efectuar transformaciones del registro gráfico al algebraico, en el tema estudiado, no está suficientemente afianzada.

Esto manifiesta que el hecho de haber trabajado con conversiones desde el registro algebraico al registro gráfico, no asegura que las conversiones en el sentido inverso, puedan efectuarse correctamente.

Este es un punto que merece especial reflexión desde el rol docente, ya que la habilidad de efectuar una conversión en un sentido no garantiza la capacidad de realizar la conversión recíproca, especialmente en los casos, como éste, en que la conversión registro algebraico – registro gráfico es congruente mientras que la conversión inversa, registro gráfico – registro algebraico, no lo es.

Por esta razón resulta recomendable trabajar las conversiones en ambos sentidos, abordando sistemáticamente las que no son congruentes. Esta sistematización incluye un trabajo específico, tanto en el aula como en el material que se utilice, orientado tanto a la identificación de las unidades significantes como a su correcta representación en el registro de arriba.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 99-140). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.