

ESTUDIO DE UN FENÓMENO ACÚSTICO EN YUCATÁN

José Isaac Sánchez Guerra*, Carlos Oropeza Legorreta**, José Juan Contreras Espinosa
UNAM, FES Cuautitlán, Departamento de Matemáticas (México)
joejade@hotmail.com, carlos_oropezamx@yahoo.es, jjuancon@correo.unam.mx

RESUMEN

En la pirámide de El Castillo, también conocida como la pirámide de Kukulcan, ubicada en Chichén Itzá, Yucatán, se da un fenómeno acústico conocido como “cola de quetzal”, el cuál consiste en que, al estar frente a alguna de las escalinatas de la pirámide, al aplaudir se escucha un eco barrido que es muy parecido al trino de un quetzal.

En el presente trabajo se presenta el estudio de este fenómeno desde el punto de vista de óptica geométrica y de ecuación de onda con aproximación de Kirchhoff. Al final se realiza una simulación numérica del fenómeno. Se estudia desde el punto de vista de óptica geométrica debido a que es el punto de vista más popular entre las personas que han estudiado el fenómeno. Pero las explicaciones desde este punto de vista son parciales, debido a que se considera la propagación del sonido en forma de rayos. Debido a que el sonido es un fenómeno ondulatorio, se da una explicación del eco barrido a partir de la ecuación de onda, que es más completa, llegando a una ecuación en la que está involucrada la explicación analítica del eco barrido, pero que no se resuelve. La simulación numérica consiste en superponer la señal original de un aplauso desfasada en el tiempo según correspondiera. Se comprueba que las frecuencias inicial y final de la simulación corresponden a las frecuencias inicial y final propuestas por Lubman.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, ecuación de onda, fenómeno acústico, Yucatán.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas fundamentales que se ha podido reconocer en la formación matemática para los estudiantes de ingeniería en México es la confrontación por una parte de la obra matemática y por otra la integración de aplicaciones en el salón de clases. Se puede considerar entonces que la matemática escolar, en especial la del nivel de educación superior se nutre no sólo de ella misma sino de otras ciencias y del propio contexto sociocultural, de esta forma la matemática toma sentido y significación de acuerdo con este reconocimiento, el conocimiento de objetos matemáticos no resulta ser el referente único para hablar de la construcción de conocimientos.

Por ello desde que el Hombre existe, la Ingeniería misma ha jugado un papel fundamental en la evolución de éste; al principio ésta consideraba como eje principal al empirismo, pero, al observar que varias actividades tenían elementos en común, hubo la necesidad de que el conocimiento

obtenido de la aplicación de la ingeniería a la vida diaria y de las observaciones hechas, se estructurara para poder comprender qué era lo que estaba sucediendo en realidad al aplicar la ingeniería y al aplicarla para resolver otros problemas.

Una de las ciencias que más importancia ha tenido debido a su gran utilidad y a la capacidad que tiene para resolver y explicar muchos de los problemas a los que se enfrenta el Hombre es la matemática. La historia del desarrollo y el desarrollo de las matemáticas en sí mismo son muy interesantes, pero en el siglo XVII tuvo un gran avance con el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal realizado por Newton y Leibniz. Éste es una poderosa herramienta para describir los fenómenos con los que convive el Hombre (principalmente los fenómenos físicos).

Una aplicación de esta herramienta son las Ecuaciones Diferenciales. Una ecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en:

- Ecuaciones diferenciales ordinarias: aquellas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.
- Ecuaciones en derivadas parciales: aquellas que contienen derivadas respecto a dos o más variables independientes.

Las ecuaciones diferenciales son muy utilizadas en todas las ramas de la ingeniería para la modelación de fenómenos físicos. Su uso es común tanto en ciencias aplicadas, como en ciencias fácticas (física, química, biología) o matemáticas, como en economía.

Un ejemplo de la aplicación de las ecuaciones diferenciales es el estudio del fenómeno acústico que tiene lugar en la pirámide de El Castillo ubicada en la antigua ciudad maya de Chichen Itza, en el estado de Yucatán. Este fenómeno consiste en que, al aplaudir estando frente a una de las escalinatas de la pirámide, el eco del aplauso es muy parecido al trino de un quetzal. Esta aplicación se explica a continuación.

En este caso, se buscan soluciones para la ecuación diferencial parcial

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi = 0. \quad (1)$$

Esta ecuación es llamada ecuación de onda, donde

- ∇^2 es el operador laplaciano,
- c es la velocidad de propagación de la onda,
- ∂_t es la derivada de la función con respecto al tiempo y
- ψ es una función escalar que depende del espacio y del tiempo.

ANTECEDENTES

Este fenómeno ha sido estudiado por (Lubman, 1998; Bielsen, 2006; Declercq et al., 2004), entre otros, desde el punto de vista de óptica geométrica. Lubman afirma que este fenómeno se debe a la versión acústica de la difracción de Bragg, que consiste en determinar qué frecuencias del aplauso se refuerzan debido a las interferencias constructivas ocasionadas por las interacciones de la onda de sonido original y los “rebotes” de ésta al chocar con los escalones. La Figura 1 muestra un sonograma obtenido por Lubman donde, del lado izquierdo, se muestran el efecto del aplauso y del eco barrido obtenido del “rebote” del sonido en la escalinata; del lado derecho se muestra el trino de un quetzal. La figura 2 muestra una reconstrucción de Lubman del eco basado en su propuesta.

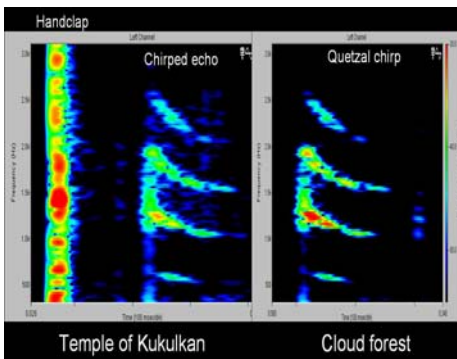


Figura 1.- Sonograma de Lubman

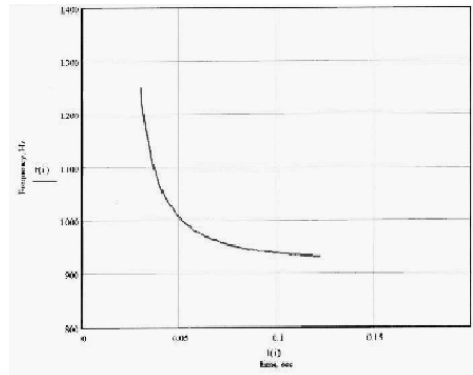


Figura 2.- Reconstrucción de Lubman

Bielsen propone una versión alternativa en términos del “tono por repetición” (repetition pitch), que se da cuando el sonido y sus repeticiones retardadas (debidas en este caso a los “rebotes” del sonido en los escalones) son sumadas.

METODOLOGÍA

En la investigación se hace uso de una propuesta para la modelación cualitativa del fenómeno acústico detectado en las escalinatas de la pirámide El Castillo, ubicada en Chichén Itzá, México, por medio de la ecuación de onda (debido a que lo que se estudia es una onda de sonido) ocupando la teoría de dispersión de ondas por la interacción de éstas con superficies rugosas (rough surfaces), en la cual se describe, comprende e interpreta el fenómeno desde un punto de vista matemático cuyo objetivo es complementar los estudios realizados desde el punto de vista físico desde el cuál se había realizado. Cabe precisar que la aportación de este trabajo consiste en el complemento desde un enfoque matemático y es a su vez la diferencia con relación a los estudios realizados por Lubman, Bielsen y Declercq.

El punto de partida se fundamenta en una revisión bibliográfica de los factores que intervienen en el estudio, tales como la deducción de la ecuación de onda y la teoría de dispersión de ondas por superficies rugosas. Después se realizó una analogía del fenómeno en estudio con respecto a la teoría de dispersión de ondas antes mencionada, tomando a la escalinata como una superficie rugosa. Al final se hizo el análisis y la adaptación de la teoría con respecto al fenómeno referido, mismos que se incluyen en el desarrollo.

DESARROLLO DEL TEMA

Nuestra propuesta es estudiar este fenómeno como lo que es, un fenómeno ondulatorio.

El sonido es una onda mecánica que se propaga a través de un medio y que produce una sensación en el órgano del oído. Esta onda es debida a cambios de presión rápidos generados por la vibración de un cuerpo, por lo que su propagación se debe a la compresión y descompresión que genera dicha vibración en el medio de transmisión. La propagación del sonido en el aire está dada por la ecuación de onda (1), donde, en este caso, ψ es el campo del sonido.

ψ depende tanto del espacio como del tiempo. Si se supone la dependencia del tiempo armónica y se separa de la dependencia temporal, ψ se puede expresar como

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

donde ω es frecuencia circular. Por lo que $\psi(\mathbf{x})$ satisface la ecuación de Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (3)$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda. Las soluciones de (3) se pueden obtener por varios métodos, uno de ellos es el siguiente.

Sea V un volumen acotado por una superficie S y sea \mathbf{A} cualquier función vectorial continua. De acuerdo al Teorema de Divergencia,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (4)$$

donde \mathbf{n} es la normal a la superficie.

Se sustituye $\mathbf{A} = E\nabla\psi$, donde E y ψ son funciones escalares continuas, en (4). Usando el Teorema de Green se obtiene

$$\iiint [E\nabla^2\psi - \psi\nabla^2E]dV = \iint \left[E \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS. \quad (5)$$

Sea

$$E = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6)$$

donde r es la distancia de un punto fijo P a un punto variable P' , ambos dentro del volumen V . (6) también satisface la ecuación (3), excepto en $r = 0$. Si se rodea el punto P por una esfera de radio R y superficie S_1 , E y ψ cumplen con (3) y, por lo tanto, el lado izquierdo de (5) desaparece y el lado derecho se integra sobre S y S_1 . Usando el Teorema del Valor Medio y calculando $\frac{\partial}{\partial n}$ en la integral sobre S_1 , se obtiene

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint \left[\psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial\psi}{\partial n} \right] dS, \quad (7)$$

que da la solución de la ecuación (3) en un punto interior de una región en términos de los valores de la función y su derivada normal en la frontera de la región.

Al estar presente un dispersor, el campo total $\psi(\mathbf{r})$ se toma como compuesto por el campo incidente $\psi^{inc}(\mathbf{r})$ y el campo que aparece de la interacción del incidente con el dispersor, $\psi^{sc}(\mathbf{r})$.

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{inc}(\mathbf{r}) + \psi^{sc}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Cuando la superficie del dispersor, S_0 , es cerrada, entonces el campo total en cualquier punto r es dado exactamente por:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{inc}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \iint \left[\psi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \right] dS_0, \quad (9)$$

donde r está dentro de un volumen cerrado, \mathbf{r}_0 es un punto fijo en el dispersor, n es el vector unitario normal a la superficie y E es como en (6), con $P = \mathbf{r}_0$ y $P' = \mathbf{r}$, por lo que E toma la forma

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}. \quad (10)$$

En nuestro caso, la superficie dispersora no es cerrada, aunque para nuestros propósitos podemos suponerla cerrada con las consideraciones correspondientes.

De (8) y (9) se tiene que:

$$\psi^{sc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint \left[\psi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_0)}{\partial n} \right] dS_0, \quad (11)$$

donde todas las cantidades se conocen, excepto el campo y su derivada en la superficie. Para estas cantidades se usa la aproximación de Kirchhoff.

Denotando por R_0 al coeficiente de reflexión para ondas planas incidentes en una superficie plana, entonces el campo total en la superficie está dado por

$$\psi(\mathbf{r}_0) = [1 + R_0(\mathbf{r}_0)] \psi^{inc}(\mathbf{r}_0). \quad (12)$$

Se supone que la onda incidente es una onda plana monocromática de la forma

$$\psi^{inc}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}}, \quad (13)$$

donde \mathbf{k}_{inc} es el vector de onda (vector que apunta en la dirección de propagación de la onda) de la onda incidente, lo que lleva a que la derivada normal de (12) sea

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r}_0)}{\partial n} = i [1 + R_0(\mathbf{r}_0)] (\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{n}) \psi^{inc}(\mathbf{r}_0). \quad (14)$$

Para el argumento de E se tiene

$$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \approx kr - k\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0, \quad (15)$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en la dirección de observación. La derivada normal de E se evalúa haciendo la suposición de que $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \gg 1$, que es equivalente a $kr \gg 1$, con lo que se tiene

$$\frac{\partial E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \approx \frac{-ie^{ikr}}{r} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}_{sc}) e^{i\mathbf{k}_{sc} \cdot \mathbf{r}_0} \quad (16)$$

donde $\mathbf{k}_{sc} = k\hat{\mathbf{r}}$ es el vector de onda de la onda dispersada.

Sustituyendo (10), (12), (14) y (16) en (11) se tiene

$$\psi^{sc}(\mathbf{r}) = \frac{ie^{ikr}}{4\pi r} \iint \left[(\mathbf{R}_0 \mathbf{k}^- - \mathbf{k}^+) \cdot \mathbf{n}_0 \right] e^{i\mathbf{k}^- \cdot \mathbf{r}_0} dS_0, \quad (17)$$

donde la suma y la diferencia de vectores de onda de las ondas incidente y dispersada han sido definidas como $\mathbf{k}^- = \mathbf{k}_{inc} - \mathbf{k}_{sc}$ y $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}_{inc} + \mathbf{k}_{sc}$.

La integración de (17) se realiza sobre la superficie dispersora S_0 . Esto puede ser convertido a una integral sobre el plano promedio de la superficie, S_M . Cada elemento de área dS_M está dado por $dx_0 dy_0$. Esta conversión no es apropiada para las partes de la superficie en que el gradiente es infinito ya sea en dirección de x o de y , por lo que se supone que ninguna parte de la superficie tiene gradiente infinito.

Considerando la figura 3, los vectores \mathbf{k}_{inc} y \mathbf{k}_{sc} están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{inc} &= k(\sin \theta_1 i - \cos \theta_1 k) \\ \mathbf{k}_{sc} &= k(\sin \theta_2 \cos \theta_3 i + \sin \theta_2 \sin \theta_3 j + \cos \theta_2 k) \end{aligned} \quad (18)$$

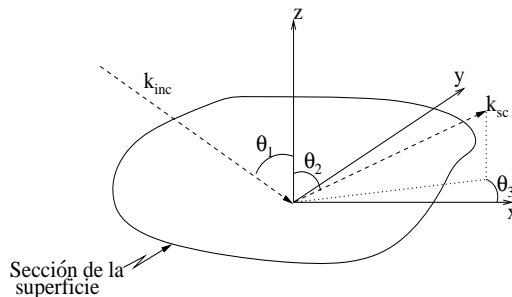


Figura 3.- Geometría para la dispersión.

Tomando en cuenta que la integración se hace sobre el plano promedio y las ecuaciones (18), la ecuación (17) queda de la forma

$$\psi_{sc} = \frac{ike^{ikr}}{4\pi r} \iint_S M_e \left(a \frac{\partial h}{\partial x_0} + b \frac{\partial h}{\partial y_0} - c \right) \times \left[ik \left[Ax_0 + By_0 + Ch(x_0, y_0) \right] \right]_{dx_0 dy_0}, \quad (19)$$

donde h es la distancia de la superficie dispersora al plano promedio.

Las constantes A , B y C están dadas por las componentes x , y y z del cambio unitario en el vector de onda $\hat{\mathbf{k}}^-$:

$$\begin{aligned} A = \hat{\mathbf{k}}^-_x &= \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ B = \hat{\mathbf{k}}^-_y &= -\sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ C = \hat{\mathbf{k}}^-_z &= -(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (20)$$

Las cantidades a , b y c están dadas por

$$\begin{aligned} a = \left(\hat{\mathbf{k}}^+ - R_0 \hat{\mathbf{k}}^- \right)_x &= \sin \theta_1 (1 - R_0) + \sin \theta_2 \cos \theta_3 (1 + R_0) \\ b = \left(\hat{\mathbf{k}}^+ - R_0 \hat{\mathbf{k}}^- \right)_y &= \sin \theta_2 \sin \theta_3 (1 + R_0) \\ c = \left(\hat{\mathbf{k}}^+ - R_0 \hat{\mathbf{k}}^- \right)_z &= \cos \theta_2 (1 + R_0) - \cos \theta_1 (1 - R_0) \end{aligned} \quad (21)$$

que son constantes sólo si el coeficiente de reflexión R_0 es independiente de la posición a lo largo de la superficie. Esta suposición es razonable cuando la superficie de dispersión separa dos regiones de propiedades acústicas o dieléctricas muy diferentes, como las que tenemos en nuestro caso.

La ecuación (19) es el resultado general de aplicar la aproximación de Kirchhoff a la dispersión de ondas para superficies dispersoras.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Se hicieron las siguientes suposiciones para obtener la ecuación (19):

1. La teoría de Kirchhoff es válida para aproximar el campo lejano en la superficie del dispersor.
2. La observación es hecha en el campo lejano de la superficie.
3. La onda incidente es plana y monocromática.
4. Ningún punto en la superficie tiene gradiente infinito.
5. El coeficiente de reflexión es constante.

Al final, y después de hacer las suposiciones mencionadas, se obtiene una ecuación cuya solución no es trivial, con lo que se puede ver que el fenómeno estudiado desde el punto de vista de la ecuación de onda es complejo de resolver, pero describe mejor el fenómeno.

CONCLUSIÓN

Las matemáticas, como apoyo a la ingeniería, nos permiten modelar fenómenos como el descrito en este documento a fin de entender de una manera más precisa qué es lo que en realidad sucede y así poder, si así se desea, reproducir el fenómeno, ya sea con las mismas frecuencias o con otras, y aplicar lo aprendido sobre otras estructuras o a otros problemas similares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bielsen, Frans A. (2006). Repetition pitch glide from the step pyramid at Chichen Itza. *Journal of the Acoustical Society of America* 120 (2), 594 – 596.
- Declercq, N. F.; Degrieck, J.; Briers, R. y Leroy, O. (2004). A theoretical study of special acoustic effects caused by the staircase of the El Castillo pyramid at the Maya ruins of Chichen-Itza in Mexico. *Journal of the Acoustical Society of America* 116 (6), 3328 – 3335.
- Lubman, D. (1998). *An archaeological study of chirped echo from the Mayan pyramid of Kukulcan at Chichen Itza*. Extraído el 5 de enero de 2010 desde <http://www.ocasa.org/MayanPyramid.htm>.
- Beckmann, Petr y Spizzichino, André. (1987). *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Norwood, Massachussets : Artech.
- DeSanto, John A. (1992). *Scalar wave theory: Green's Functions and Applications*. Berlin: Springer-Verlag.
- Ogilvy, J. A. (1991). *Theory of wave scattering from random rough surfaces*. Bristol, Philadelphia: Adam Hilger.